Formulaire aide mémoire

1- La première face et la 1ère couronne

Faire d’abord la croix en face haute

Puis mettre les coins en place

Mette un coin face verticale en bas de son emplacement final

A gauche :

A’ B’ A

A droite :

A B A’

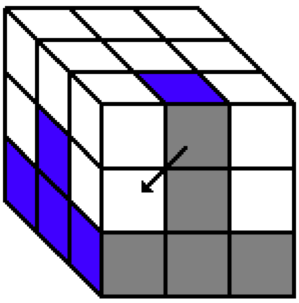
Mettre un coin face dessous en bas de son emplacement final

A droite : B’ D’ B B D puis cas précédent : A B A’

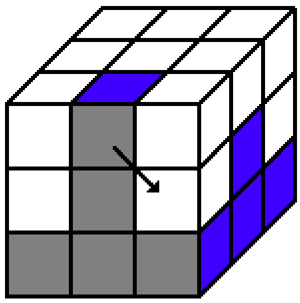
A gauche : tourner le cube

2- Faire la 2ème couronne

Placer la face faite en dessous et appliquer:



A' H' A' H' A' | H A H A



A H A H A | H' A' H' A'

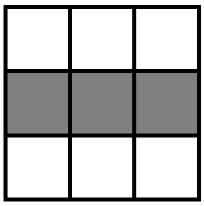
Le but désormais est de terminer la dernière face (placée au dessus)

Ou H’ G’ H G H A H’ A’

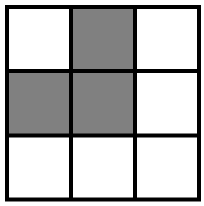
ou H D H’ D’ H’ A’ H A

3- Obtenir une croix

On veut juste que la couleur des arêtes sur la face du dessus soit correcte. On ne s'occupe pas de la 3ème couronne.Vu du dessus:



A D H | D' H' A'



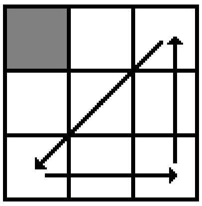
A H D | H' D' A'

D’ H’ A’ H A D

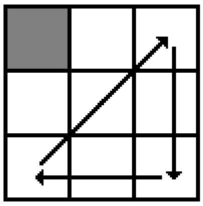
Si aucune arête n'est correcte appliquer n'importe laquelle des 2 formules puis recommencer.

4- Positionner les coins

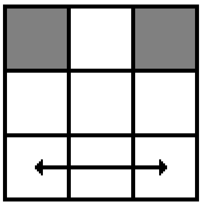
On ne s'occupe pas de les orienter (on veut juste que les couleurs des coins soient justes).



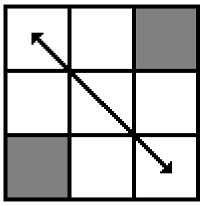
H G H' | D' | H G' H' | D



D' | H G H' | D | H G' H'



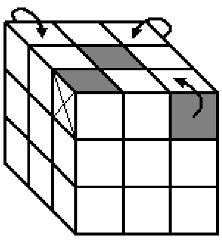
P H' A' H P' H' A (H^2)



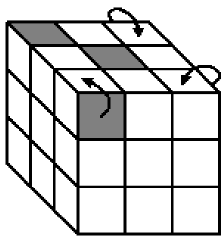
G H^2 G' D' H G H' D H^2 G'

5- Orienter les coins

Si l'on se trouve dans l'une des 2 configurations suivantes (un seul coin bien orienté), appliquer la formule associée pour obtenir tous les coins:



D H D' H D H^2 D'



D' H' D H' D' H^2 D

Si aucun coin n'est bien orienté ou si 2 coins sont bien orientés, il faut se ramener au cas ci-dessus (1 coin bien orienté). Il nous faut pour cela définir la notion de *cible de la première formule*. La cible est la face repérée par une croix sur le dessin ci-dessus. Pour changer de cible il suffit de faire pivoter le cube dans la main ou de faire pivoter la face du haut).

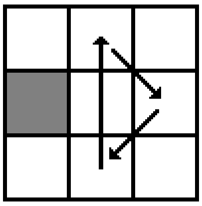
- Si aucun coin n'est bien orienté, choisir pour cible une face qui soit de la même couleur que le centre de la face du haut (grisé sur l'exemple). Puis appliquer la 1ère formule.

- Si 2 coins sont bien orientés, choisir pour cible une face qui ne soit pas de la même couleur que le centre de la face du haut parmi les 2 coins mal placés (il ne devrait y avoir qu'une possibilité). Puis appliquer la 1ère formule.

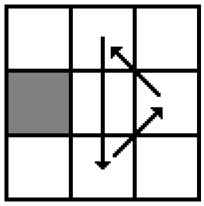
On se ramène au cas initial où un seul coin est bien orienté et on recommence.

6- Terminer les arêtes

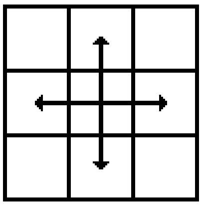
Il s'agit de finir la 3ème couronne



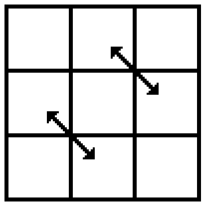
D^2 | H A P' | D^2 | P A' H | D^2



D^2 | H' A P' | D^2 | P A' H' | D^2



D G H^2 D' G' | A' P' H^2 A P



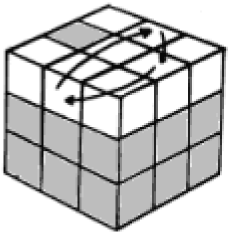
D' A D P' A' D A P' D A' D' P^2 (H')

Le générateur **h^{2}gd'agd'bgd'p^{2}dg'bdg'adg'** fait pivoter sur eux-mêmes les cubes arêtes AH et BH , sans rien changer d'autre ! (Ce générateur porte le nom de *générateur de Rubik*)

Autre méthode apres la 2ème couronne :

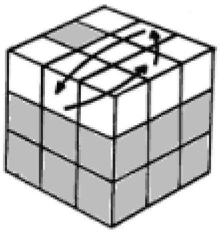
10 Mise en place des cubes arêtes

Générateur 3



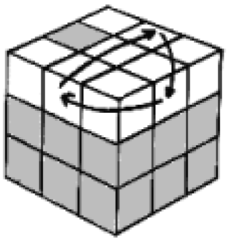
a hdh'd' a'

Générateur 3'



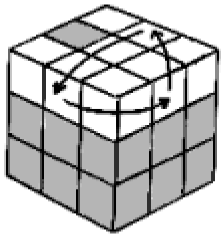
a dhd'h' a'

Générateur 4



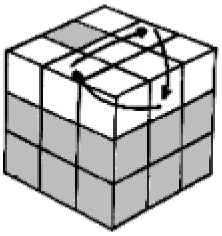
p' d'h'dh p

Générateur 4'



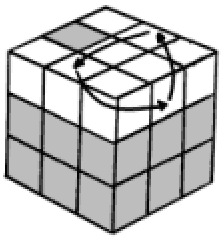
p' h'd'hd p

Générateur 5



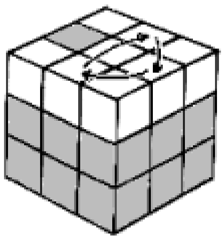
dp'd'p h^2 ph^2p'

Générateur 5'



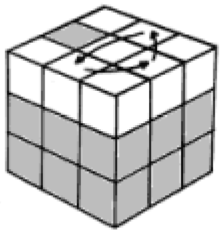
$ph^2p'h^2$ p'dpd'

Générateur 6



$h^2d'h^2d$ hd'hd

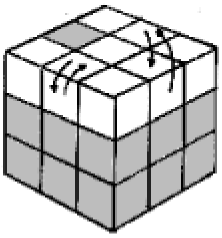
Générateur 6'



d'h'dh' $d'h^2dh^2$

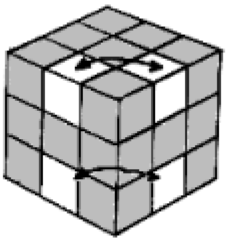
ou aussi ,
SANS MODIFICATION
DES CUBES SOMMETS :
d^2 hap' d^2 a'ph d^2

Générateur 8



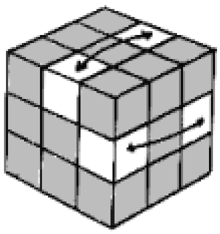
ha'h'g'hga

Générateur 9



dg'bh'dhb'a^2gd'b

"Manoeuvre des 6"



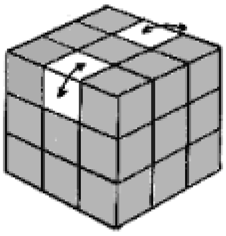
$d^2h^2d^2h^2d^2h^2$

Le générateur 8 répété plusieurs fois donne des choses intéressantes :
(générateur 8)^4 = générateur 14 (pivote les cubes-sommets : AHG, AHD et DHP sans rien changer d'autre)
(générateur 8)^6 = générateur Thistlewaite (pivote les cubes-arêtes HP et HD , sans rien changer d'autre)

11- orienter les cubes arètes

Remarque : Cette étape est inutile si on se débrouille bien en plaçant les cubes arêtes

Rubik

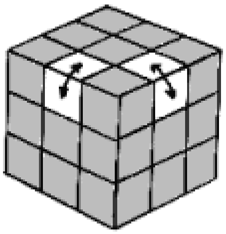


h'ad'ha'dg'hp'dh'pd'g

ou aussi

h^2.gd'.a.gd'.b.gd'.p^2.dg'.b.dg'.a.dg'

Thistelthwaite

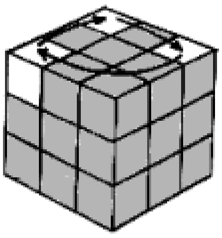


d'$h^2$$d^2$hd'h'd'$h^2$gada'g'

Thistlewaite peut-être plus facile à retenir avec le générateur suivant : **(MR)' b^2 (MR) b (MR)' b' (MR) . h . (MR)' b (MR) b' (MR)' b^2 (MR) . h'**

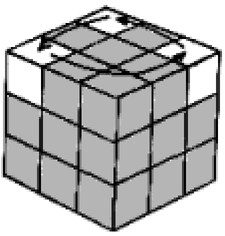
MR = "middle right quarter turn" = 1/4 de tour de la tranche de droite (celle qui coupe verticalement la face avant) dans le sens des aiguilles d'une montre lorsqu'on regarde le face de droite.
Attention ! Dans cette manoeuvre, les centres des faces bougent. Ce générateur a la forme générale $X . s . X^{-1} . s^{-1}$, avec X = (MR)' b^2 (MR) b (MR)' b' (MR) et s = h. On applique X, on applique h, puis on applique X à l'envers et enfin h à l'envers.

Générateur 10



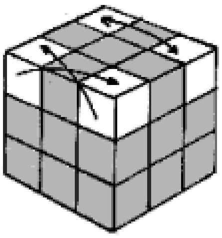
g' hdh' g hd'h'

Générateur 10'



hdh' g' hd'h' g

Générateur 11



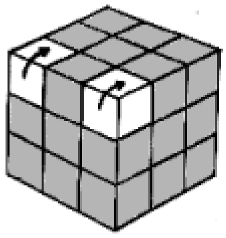
a $(dhd'h')^3$ a'

Remarque : générateur 11 = $(\text{générateur } 3)^3$. Il n'y a donc pas à le retenir si on connait le 3.

Il suffit de connaître le générateur 11. Pour effectuer un mouvement des cubes où le générateur 10 ou 10' serait nécessaire, on peut s'en sortir de la manière suivante .
Admettons que l'on veuille faire tourner trois CS que l'on numérote 1, 2 et 3 (1 prend la place de 2, 2 prend la place de 3 et 3 prend la place de 1).
L'astuce est de déranger deux fois de suite un couple de CS n°4 et 5 différents des 1, 2 et 3.
On applique le générateur 11 pour échanger 1et 2 d'une part et 4 et 5 d'autre part. 1 est arrivé à sa place. 2 est arrivé à la place de 1.
Ensuite , on applique le générateur 11 pour échanger 2 et 3 d'une part et 4 et 5 d'autre part. 2 est arrivé à la place de 3. 3 est arrivé à la place de 2 qui était à la place de 1, donc 3 est à sa place. 4 et 5 ont repris leur place d'origine. Attention, il faut en général effectuer un ou deux quarts de tour de face qu'on fera à l'envers à la fin pour amener les CS 1, 2, 4 et 5 en bonne configuration pour pouvoir effectuer le générateur 11.

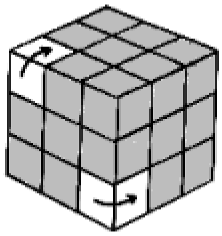
12- Orienter les cubes sommets

Générateur 12



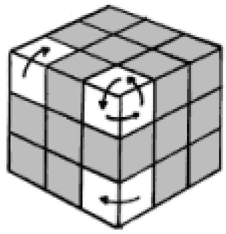
d'bdb' d'bd . h' . d'b'd bd'b'd . h

Générateur 13



hp'h'g'p'g.a^2.g'pghph'.a^2

Générateur 14

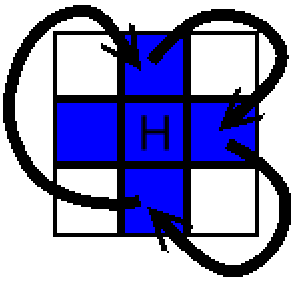


$(ad'a'd.dh'd'h.ha'h'a)^2$

Seul le générateur 12 est à connaître. Les 13 et 14 s'obtiennent en appliquant deux fois de suite le générateur 12.
Comment retenir le générateur 12 ? C'est très difficile de l'apprendre ... par coeur. Mais c'est très facile de le comprendre et de le voir. Observez bien le déplacement des deux CS que l'on veut faire pivoter. Ils vont chacun à leur tour se "promener" sur la face du bas.
Le premier CS fait une promenade sur la face du bas, remonte sur la face du haut et après un quart de tour de la face du haut, le deuxième CS fait la même promenade mais à l'envers.

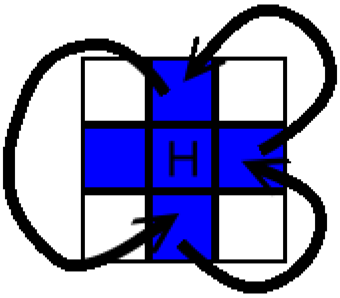
14- Autre méthode, la croix obtenue, on peut l'orienter :

Mouvement vers la droite dit " normal "



DH D'H DH² D'H²

Mouvement vers la gauche dit " inverse "

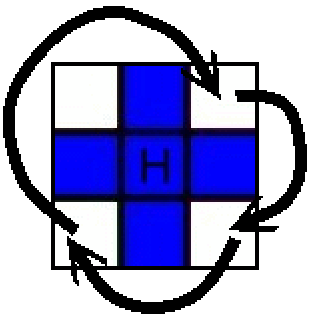


D'H' DH' D'H² DH²

Logiquement, si vous arrivez à bien placé une des branches de la croix rien qu'en tournant le face, il vous suffit d'appliquer une de ces 2 formules avec ce bloc à gauche. Si ce n'est pas le cas, répétez l'opération autant de fois que nécessaire.

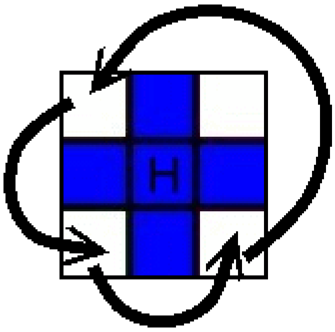
15- Placement des coins

Mouvement vers la droite dit " normal "



GD' HG' H'D HG H'G'

Mouvement vers la gauche dit " inverse "

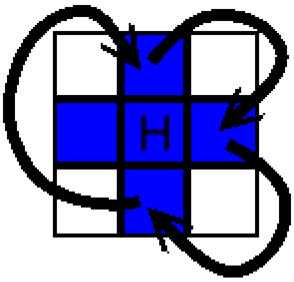


GD' H'D HG' H'D' HD

16- Orientations finales

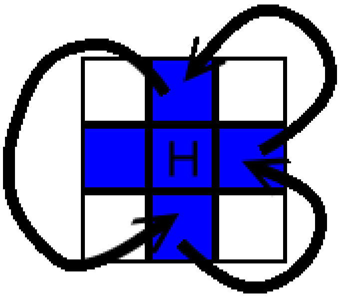
Maintenant, il ne nous reste plus qu'à bien orienter quatre blocs. Et pour cela, deux formules qui devraient vous rappeler quelque chose...

Mouvement vers la droite dit " normal "



DH D’H DH² D’H²

Mouvement vers la gauche dit " inverse "



D’H’ DH’ D’H² DH²

Mais cette fois-ci, il n'y a pas à choisir ! Regardez bien les schémas... En fait, nous allons déplacer les blocs indiqués, puis les remettre à leur place respective !

Mais quel intérêt ? Et bien en appliquant la première puis la seconde formule à la suite, aucun bloc ne changera de place... mais l'orientation de certains, si ! Et devinez lesquels : seulement les deux coins de gauches de la face H. Il vous faut comme toujours appliquer les formules avec la face H vers le haut.

Conseil : l'orientation des blocs changera de cette manière : la face H de deux coins de gauches se retrouvera sur la face G.

17- générateurs

Voir les générateurs sur http://trucsmaths.free.fr/rubik_groupe.htm

Le groupe G est engendré par les rotations élémentaires d'un quart de tour des faces : G = < a, p, h, b, g, d >

On numérote les facettes du cube de 1 à 48. On peut ainsi considérer le groupe du cube comme un sous-groupe de S_{48}

			1	2	3						
			4	h	5						
			6	7	8						
9	10	11	17	18	19	25	26	27	33	34	35
12	g	13	20	a	21	28	d	29	36	p	37
14	15	16	22	23	24	30	31	32	38	39	40
			41	42	43						
			44	b	45						
			46	47	48						

Les générateurs de base décomposés en produit de cycles à supports disjoints :

a := (17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11),
p := (33,35,40,38)(34,37,39,36)(3, 9,46,32)(2,12,47,29)(1,14,48,27),
g := (9,11,16,14)(10,13,15,12)(1,17,41,40)(4,20,44,37)(6,22,46,35),
d := (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24),
h := (1, 3, 8, 6)(2, 5, 7, 4)(9,33,25,17)(10,34,26,18)(11,35,27,19),
b := (41,43,48,46)(42,45,47,44)(14,22,30,38)(15,23,31,39)(16,24,32,40).

Remarque : Il existe des ensembles générateurs du groupe à moins de 6 éléments.

1. Les 5 générateurs a, g, d, h et p engendrent le générateur b : on a b = P h P où P = d g' a^2 p^2 d g'.

   h=P b P
   On a donc G = < a, p, h, g, d >

2. Il y a mieux ! G = < m_{991}, m_{992}> où m_{991} = hpghg'h'p' et m_{992} = d^2agb'd'

Le groupe du sandwich
On n'utilise que les mouvements AP', A'P, DG' D'G, HB', BH'
Le groupe antisandwich
On n'utilise que AP, DG, BH
Il contient PA = AP, A2P2=P2A2=APAP

13- Ordre des générateurs

- Ordres possibles des éléments de G

Rappel : l'ordre d'un élément (ici, un mouvement du Rubik's cube) est le nombre de fois qu'il faut effectuer le mouvement pour revenir à la position initiale. En termes de théorie des groupes, l'ordre d'un élément x d'un groupe est le plus petit entier n tel que x^n soit l'élément neutre.

Il y 73 ordres différents pour les éléments de G.

Cliquez ici pour voir
tous les ordres possibles des éléments du groupe du Rubik's cube et pour chaque ordre un élément de longueur minimale

Il y a des éléments d'ordres premiers : 2, 3, 5, 7 et 11. Ce sont les seuls facteurs premiers de card G.
Il y a des éléments d'ordres petits : 2, 3, 4, 5, 6.
Il y a des éléments d'ordres grands, par exemples : 99, 105, 231, 315, 1260.

Elément d'ordre maximal

Le plus grand ordre possible d'un élément du groupe du Rubik's cube est 1260.

Le mouvement de Butler $\mathbf{d\ a^2\ p^{-1}\ h\ p^{-1}}$ est un élément d'ordre 1260.

Quelques détails :
Au bout de 15 Butler (j'ai pas dit Buckler ! Au bout de 15 Buckler, on a juste fortement envie de pisser ...) les 8 CS sont à leur place, mais pas forcément bien orientés. Ils sont en place et bien orientés au bout de 45 Butler.
Après 14 mouvements de Butler, les 12 CA sont à leur place, mais pas forcément bien orientés. Il faut 28 Butler pour les ranger tous correctement.
L'ordre du mouvement de Butler est donc le plus petit nombre qui réunissent les conditions sur les CS et les CA. C'est le PPCM de 45 et de 28, sot 1260.

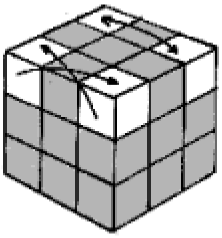
Eléments d'ordre 2

$\mathbf{a^2, p^2, d^2, g^2, h^2}$ **et** $\mathbf{b^2}$ sont évidemment des éléments d'ordre 2.

Les manoeuvres qui ont pour effet une permutation de deux paires de cubes (un produit de deux transpositions à supports disjoints) sont d'ordre 2.

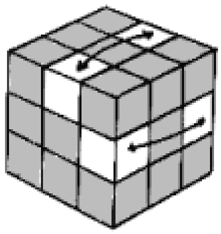
Exemples :

Echange de deux paires de CS
agh <--> adh , pgh <--> pdh



$\mathbf{a\ (dhd'h')^3\ a'}$

"Manoeuvre des 6"



$\mathbf{d^2h^2d^2h^2d^2h^2}$

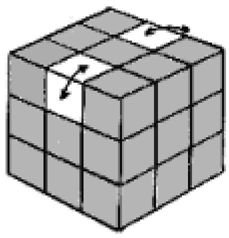
Les manoeuvres qui ont pour effet un pivotement d'un certain nombre (obligatoirement pair) de CA sur eux-mêmes sans rien changer d'autre sont d'ordre 2.

Exemples :

- La manoeuvre de Rubik : $\mathbf{h^2.gd'.a.gd'.b.gd'.p^2.dg'.b.dg'.a.dg'}$
- La manoeuvre de Thistlethwaite : $\mathbf{d'h^2d^2hd'h'd'h^2gada'g'}$
- Le *superflip* également appellé *le centre* qui fait pivoter **tous** les CA sans rien changer d'autre :

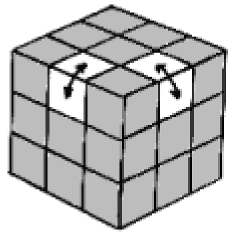
$$\mathbf{dg\ b^2\ p'\ g^2a^2d^2\ h'bd\ b^2\ a'p'b'\ a^2\ b'\ d^2\ h'\ a^2\ b'}$$

Rubik



$\mathbf{h^2.gd'.a.gd'.b.gd'.p^2.dg'.b.dg'.a.dg'}$

Thistelthwaite



$\mathbf{d'h^2d^2hd'h'd'h^2gada'g'}$

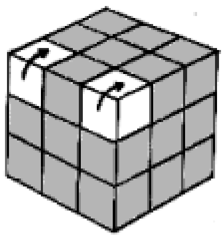
12-flip + 8-twist : fait pivoter tous les cubes-arêtes et tous les cubes-sommets
$\mathbf{b\ a^2\ h'\ p^2d^2\ p^2d^2\ gp'b'a\ b^2\ a\ p^2\ ha'\ dg\ h^2\ a'}$

a h a’ h a h’ d h’ d’ h a’ h a h’ d h’ d’ a’ d b a b’ g b’ g’ b a’ b a b’ g b’ g’ b a’ d’
Fait pivoter tous les coins

Eléments d'ordre 3

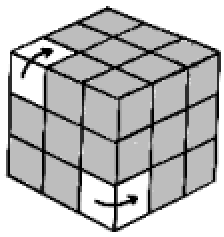
Les permutations circulaires de trois CA ou de trois CS (3-cycles) sont des éléments d'ordre 3.
Les manoeuvres qui consistent à réorienter deux ou trois CS sont d'ordre 3.

2-twist



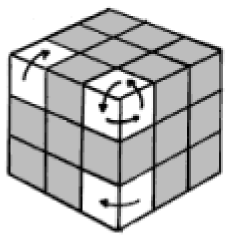
d'b db' d'bd . h' . d'b'd bd'b'd . h

2-twist bis



$\mathbf{hp'h'g'p'g.a^2.g'pghph'.a^2}$

3-twist



$\mathbf{(ad'a'd.dh'dh.ha'h'a)^2}$

Eléments d'ordre 4

d est un élément d'ordre 4.
a est un élément d'ordre 4.
Evidement, les autres quarts de tour de face sont aussi des éléments d'ordre 4.

Eléments d'ordre 6

$\mathbf{a^2d^2}$ est un élément d'ordre 6.
Le ***12-flip + 8-twist*** qui fait pivoter tous les cubes-arêtes et tous les cubes-sommets est un élément d'ordre 6 :

$$\mathbf{b\ a^2\ h'\ p^2d^2\ p^2d^2\ gp'b'a\ b^2\ a\ p^2\ ha'\ dg\ h^2\ a'}$$

Elément d'ordre 7

Un élément d'ordre 7 engendre un sous-groupe cyclique (puisque 7 est premier) donc un élément d'ordre 7 est un 7-cycle (sur les cubes-arêtes).

Le mouvement **$(hd)^{15}$** est un un élément d'ordre 7. C'est un cycle sur 7 CA en 30 quarts de tour de faces.

Un équivalent en moins de coups est : h'd h'd' h'd h^2d'hd'h^2dh'd' h'd h'd

Elément d'ordre 11

Un élément d'ordre 11 engendre un sous-groupe cyclique (puisque 11 est premier) donc un élément d'ordre 11 est un 11-cycle (sur les cubes-sommets).

Le mouvement **$(g^2pdb^{-1}g^{-1})^7$** est un un élément d'ordre 11. C'est un cycle sur 11 CS en 35 quarts de tour.

Un équivalent en moins de coups est : **$a^2d^{-1}hb^{-1}p^{-1}bg^{-1}h^{-1}bpgbp^2h^2b^2d^2p^2b$**

Elément d'ordre 105

ad est un élément d'ordre 105 !

Quelques explications :
Comme on peut le lire à la section générateurs du groupe, en numérotant les facettes des petits cubes, on a
a := (17,19,24,22)(18,21,23,20)(6,25,43,16)(7,28,42,13)(8,30,41,11),
d := (25,27,32,30)(26,29,31,28)(3,38,43,19)(5,36,45,21)(8,33,48,24),
Et après quelques calculs sur les permutations, on obtient la décomposition de ad (c'est-à-dire a ° d en termes de permutations) en produit de cycles à supports disjoints :
ad = (3, 38, 16, 6, 25, 27, 32, 41, 11, 8, 33, 48, 22, 17, 19)(5, 36, 45, 23, 20, 18, 21)(7, 28, 26, 29, 31, 42, 13)(24, 30, 43)
Puisque des cycles à supports disjoints commutent, l'ordre d'un produit de tels cycles est le PPCM des ordres des cycles. D'où : o(ad) = PPCM (15, 7, 7, 3) = 3 x 5 x 7 = 105

Elément d'ordre 99

ad^2bg^2 est un élément d'ordre 99 (99 = 11 x 3 x 3).

Elément d'ordre 231

$apdb^{-1}$ est un élément d'ordre 231 (non-premier : 231 = 11 x 7 x 3)

Elément d'ordre 315

adpg, appelé Furball (adpg en notations anglaises : frbl) est un élément d'ordre 315.

Quelques explications sur celui-là : voici les effets de mouvements Furball successifs sur le cube.

Face Haut

- $(\text{Furball})^3$: tous les CS de la face Haut sont en place.
- $(\text{Furball})^5$: tous les CA de la face Haut sont en place.
- $(\text{Furball})^{15}$: la face Haut est restaurée

Tranche du milieu

- $(\text{Furball})^5$: le CA 'GA' est à sa place
- $(\text{Furball})^7$: les CA 'DA' , 'GP' et 'DP' sont à leurs places
- $(\text{Furball})^{35}$: la tranche du milieu est restaurée.

Face bas

- $(\text{Furball})^7$: les CA de la face Bas sont en place
- $(\text{Furball})^9$: les CS de la face Bas sont en place
- $(\text{Furball})^{63}$: la face Bas est restaurée.

Ainsi, l'ordre du Furball est le PPCM de 15, 35 et 63 , c'est-à-dire 3x3x5x7 = 315

14- Figures remarquables

1 Damier : A2 P2 D2 G2
2 damiers : (A2 D2 P2 G2)3
4 damiers : (A2 H2 P2 B2)3 (D2 H2 G2 B2)3
6 damiers : A2 P2 D2 G2 H2 B2
4 Croix grecque : A2 P2 D2 G2 H2 A2 P2 D2 G2 B2
Ou H D2 A2 P2 D2 A2 P2 H’ D2 A2 P2 D2 A2 P2
6 croix grecques : (D A2 P2 D A2 P2)3 (B A2 P2 B’ A2 P2)3
Ou D A2 P2 D2 G2 H2 A2 P2 D2 G2 B2 D’
2 petits carrés : D’ G A2 D2 G2 P2 G’ D
4 carrés : D2 G2 H B’ A2 P2 H B’
6 carrés : D G’ A P’ H B’ D G’
Hexagone : B D A2 D’ A’ B’ D’ B2 D A2 B D2 B’ D’ A’ B’ A2 B D
4 barres : G2 H2 D2 G2 H2 G2
6 barres : D2 A B D2 B’ D P2 D’ B D2 B’ A’ D2 G2 P B G2 B’ G A2 G’ B G2 B’ P’ G2 A2 D2 G2 P2 D
Double cube : A’ D H2 D’ H’ P H2 P’ H A P G’ B2 G B A’ B2 A B’ P’
Triple cube : double cube et G2 A’ H P’ H’ G’ P’ G A G’ P G H P H’ G2
Triple cube : double cube et G2 H P’ H’ G’ P’ G A’ G’ P G H P H’ A G2
Serpent : P D G’ B’ D2 B G D’ P’ D2 H P2 H’ B D2 B’
Ver de terre : D HA2 B’ D G’ A P’ B’ A’ D’ A2 D H2 A D2 A’ D’ H’A’ H2 A D