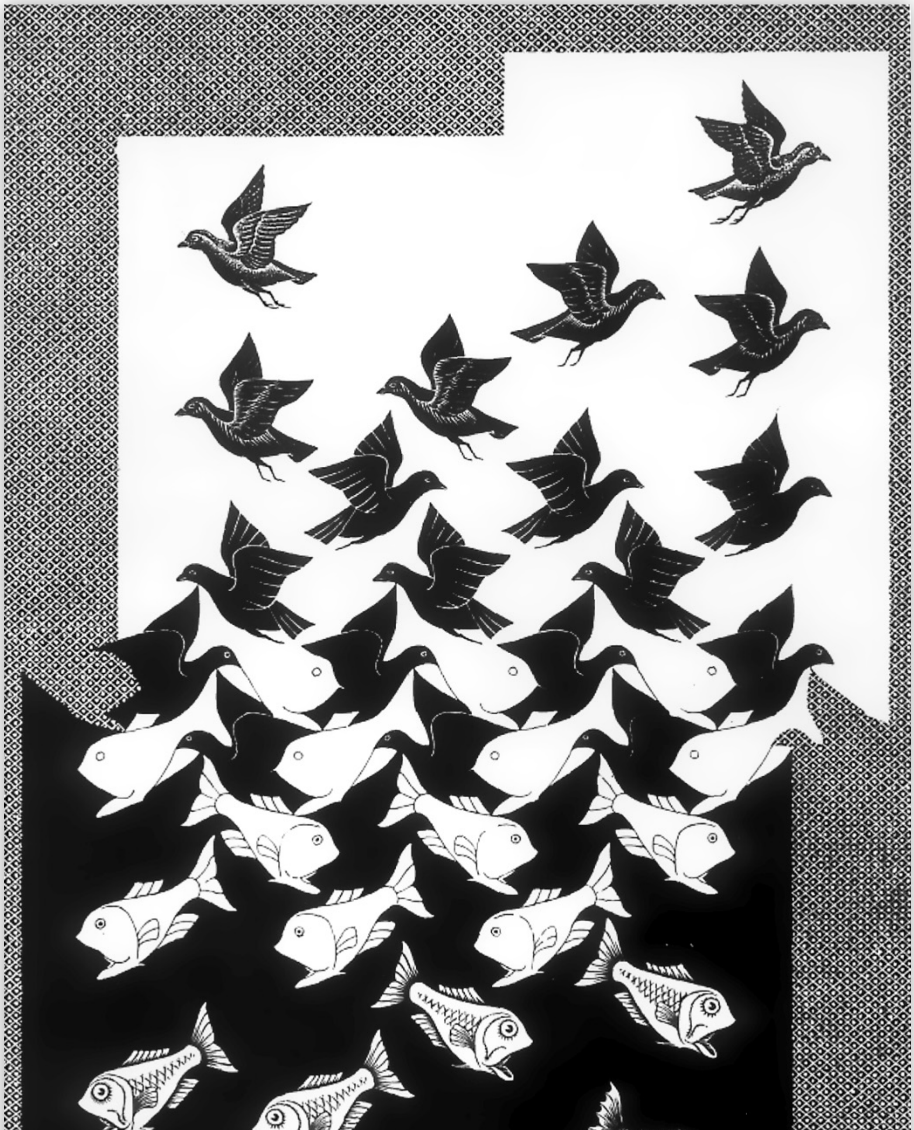
LA SYMÉTRIE
dans la nature, dans la science et dans l'art.



M.C. Escher

Jean Philibert

Contents

Introduction

Cette gravure de Maurits Escher (couverture), intitulée «Ciel et Mer» nous offre le spectacle d'une transformation d'un double motif, les lacunes entre le poissons se transformant progressivement en oiseaux, tout cela sur la base d'une trame géométrique. Instinctivement, nous y recherchons des règles de composition. Par contre, dans notre univers quotidien, nous ne réalisons pas spontanément que les objets, les spectacles, que nous voyons suivent fréquemment des agencements basés sur certaines régularités : que ce soit les beaux empilements d'oranges sur les étals du marchand de fruits, les corolles des fleurs, les tapis d'orient, et même les plaques de voirie en fonte (aux motifs très variés), les effets de réflexion dans les miroirs... Par contre nous ne pouvons qu'être saisis d'étonnement et d'admiration, quand, visitant l'Alhambra de Grenade, nous essayons de déchiffrer l'ordonnancement de la décoration avec sa beauté et sa complexité qui semble infinie, Les règles géométriques sur lesquelles est fondé le décor crèvent les yeux. On se perd même dans le dédale des entrelacs, qui cependant suivent des règles de composition très strictes. Toutes ces impressions nous conduisent naturellement à formuler plus ou moins consciemment le concept de symétrie. C'est celui-ci qui va nous servir de fil directeur au cours de cet article. Mais auparavant il importe de bien comprendre ce que recouvre le mot symétrie.

Tas d'oranges disposé sur un étal avec une stricte symétrie.

La symétrie dans la nature, dans la science et dans l'art

Symétrie, que l'on devrait écrire avec deux *m* comme en français ancien — voir par exemple le dictionnaire d'Antoine Furetière (1680) ou l'Encyclopédie de Diderot et d'Alembert [1] — ou comme en anglais pour être conforme à l'étymologie : *συμμετρία*, juste mesure. Pour les Grecs de l'Antiquité, ce terme qualifie des objets commensurables, qui rendent l'ensemble harmonieux, bien équilibré et traduit finalement une sensation de la beauté. En ce sens la symétrie se tient à l'écart des extrêmes [2]. Selon Vitruve :

> « *Quant à la symétrie, c'est un accord convenable des membres, des ouvrages entre eux, [...] le rapport de chacune des parties avec l'ensemble, ainsi que dans le corps humain...* ».

Pline l'ancien dans son *Histoire naturelle* exprime ses regrets : *Non habet Latinum nomen symmetria*. C'est cette définition qu'a reprise Émile Littré dans son Dictionnaire de la langue française (1863) :

> « *Rapport de grandeur et de figure que les parties d'un corps ont entre elles et avec le tout. [...] Tout espèce d'arrangement suivant un certain ordre.* »

C'était aussi l'opinion de Montesquieu qui intitule un chapitre de son livre *Essai sur le goût* (1757) : « Du plaisir de la symétrie ».

> « *La raison qui fait que la symétrie plaît à l'âme, c'est qu'elle épargne de la peine, qu'elle la soulage et qu'elle coupe pour ainsi dire l'ouvrage par la moitié* ».

Par la suite, le mot a souvent pris un sens plus restreint, si bien que, dans le langage courant, comme chez Montesquieu dans le passage cité, quand nous pensons symétrie, nous avons en fait l'idée de symétrie bilatérale : l'identité de deux parties d'un objet ou d'un être de part et d'autre d'une droite ou d'un plan, comme vus l'un l'autre dans un miroir. C'est ce que note Claude Perrault dans sa traduction (avec commentaires), paru en 1673, du fameux ouvrage de Vitruve (Les dix livres d'Architecture) :

> « *Je crois néanmoins qu'on doit établir deux espèces de symétrie dont l'une est le rapport de raison des parties proportionnées, qui est la symétrie des anciens, et l'autre est le rapport d'égalité qui est notre symétrie...* ».

---

1 Tome 15,page 735.

2 Selon Pline la langue latine n'avait pas de terme propre pour symmetria, quoique, à la suite de Ciceron, Vitruve dise commensus qui me semble une bonne traduction, d'où en français commensurable.

Seuil de maison
Kanchipuram – Inde

Tapis d'Orient (XVIe siècle)
Victoria and Albert Museum, Londres

C'est encore ce qu'écrit Viollet-le-Duc :

« *la symétrie veut dire aujourd'hui… une similitude des parties opposées, la reproduction exacte à la gauche d'un axe de ce qui est à la droite* » 3.

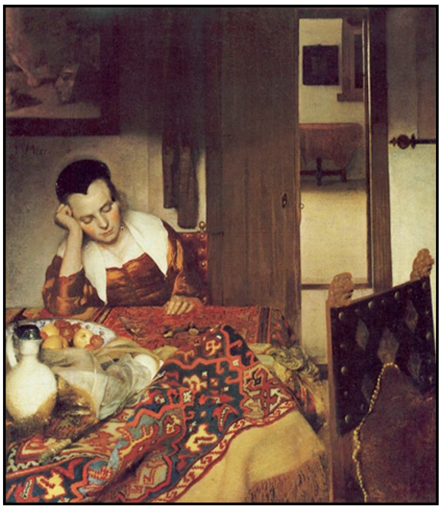
Il ajoute même :

« *Il faut rendre cette justice aux Grecs, auteurs du mot symétrie, qu'ils ne lui ont jamais prêté un sens aussi plat* ».

La perception de la symétrie est très naturelle, quasi innée, comme en témoignent de nombreuses oeuvres populaires — par exemple avec les décorations des seuils des maisons en Inde, ou, plus proches de nous, les tas d'oranges que nos commerçants savent disposer dans leur étal en respectant une stricte symétrie 4.

La généralisation des miroirs, ou la diffusion des tapis d'Orient — connus et appréciés en Occident depuis le XIVe siècle d'après leur présence dans les peintures de la Renaissance et du XVIIe 5 — n'ont pas peu contribué à rendre familières ces notions de symétrie.

Ensuite les mathématiciens ont généralisé le concept à d'autres opérations que le miroir : translation, rotation, réflexion, glissement… Comme nous allons l'observer grâce à de nombreux exemples empruntés à la nature, à l'art et aux mathématiques !



La jeune fille endormie
Jan Vermeer, The Metropolitan Museum of Art, New York.

3 Dictionnaire raisonné de l'Architecture Française.

4 Cet arrangement réalise l'empilement de sphères le plus compact possible : c'est la « conjecture » de Kepler, qui n'a été démontrée qu'il y a quelques années seulement !

5 Si précieux que l'on ne les posait pas sur le sol, sauf sous les pieds de la Vierge ! Plusieurs types sont nommés d'après les peintres qui les ont figurés (Bellini, Crivelli, Memling, Holbein, Lotto...).

Chine – Néolithique
Musée d'Archéologie Nationale

Suse
(fouilles J. de Morgan) – MAN

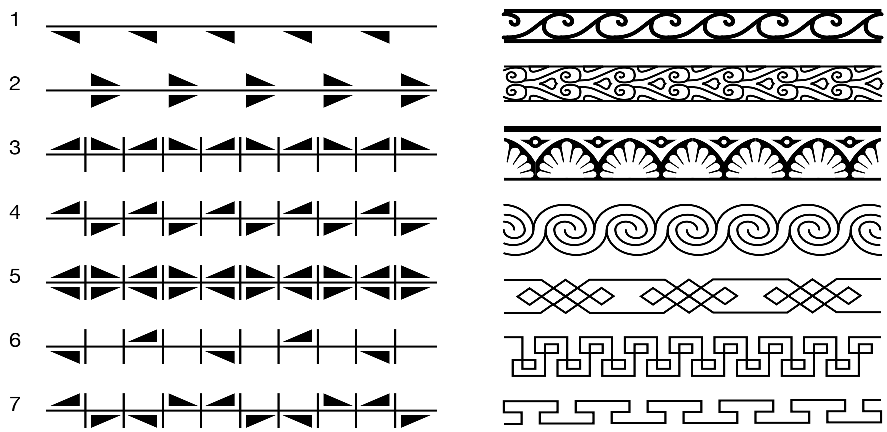
Attique
(env.-700, Louvre)

Garde-fou de la terrasse de Saint Germain-en-Laye

Les frises

Comment les artistes ont-ils intuitivement perçu et appliqué les lois de la symétrie, y compris sous des aspects très sophistiqués ? Leur application la plus simple est la répétition d'un même motif suivant une droite dans le plan ou en cercle autour d'un vase : les exemples abondent depuis la plus haute antiquité.

La variété des frises semble sans fin. Mais en dépit de la variété des motifs (chevrons, méandres, palmettes, animaux stylisés…), elles se rattachent à un nombre restreint d'opérations de symétrie — en fait sept — comme schématisé ci-dessous, des schémas de principe, qui montrent la reproduction périodique par translation suivant une droite d'un motif symbolisé par un triangle noir illustrés dans la colonne de droite par des exemples. C'est le cas de la grecque, répétition d'un motif à base carrée — le méandre — parfois enlacé avec ses voisins. Ce

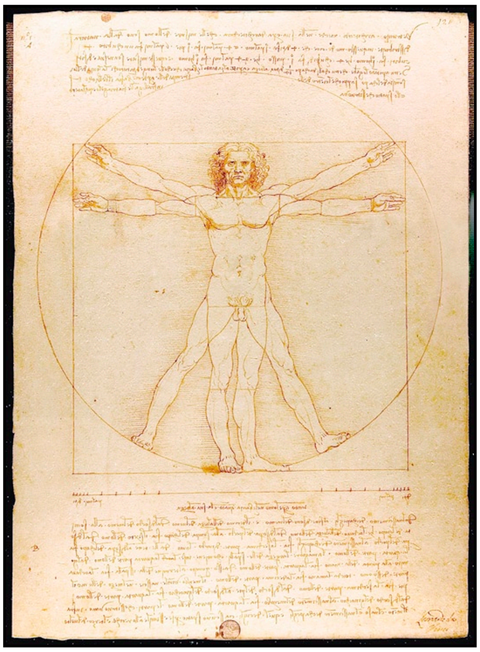


Les sept schémas de frise (translation du motif simple ou affecté de diverses symétries)

motif primitif peut être enrichi par diverses opérations de symétrie locales (réflexions, inversion, glissement et leurs combinaisons) comme le montrent les six lignes suivantes de la figure, et seulement six ![6] Le garde-fou de la terrasse de Saint Germain en Laye montre un simple exemple du troisième cas de la photo ci-contre (gauche).

Mais on notera tout de suite que, non moins importante que la symétrie, est une certaine asymétrie, qui se traduit par des écarts, petits ou grands, à la symétrie rigoureuse. Les artistes en ont usé avec beaucoup de subtilité. J'y reviendrai plus loin.

6 En termes savants pour un groupe ponctuel, nous avons 7 groupes d'espace.



Les proportions humaines
Leonard de Vinci, d’après la description de Vitruve

Test de Rorschach

La symétrie bilatérale

Nul regard ne peut échapper à l'évidence de la symétrie bilatérale, encore appelée sagittale (si l'on met l'accent sur la distinction avant ou arrière), de nombreux animaux et en particulier de l'être humain — voir le fameux dessin des proportions humaines inscrit dans un cercle par Leonard de Vinci, suivant la description de Vitruve, dessin qui fut également utilisé en publicité.

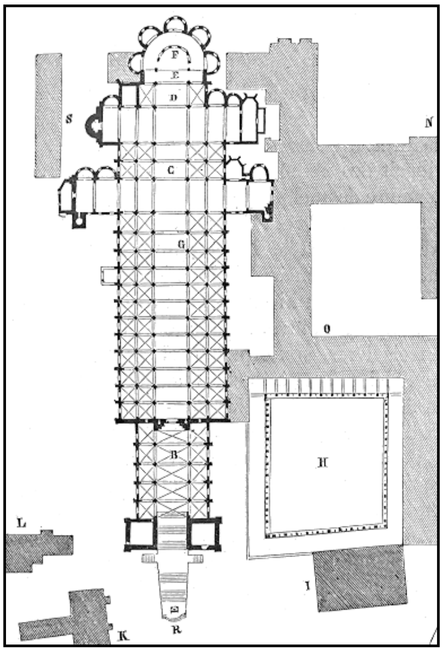
La bilatéralité des animaux — et de l'homme !— qui nous est si familière est apparue très précocement au cours de l'évolution du règne animal, il y a un plus de 500 millions d'années (l'explosion cambrienne) et concerne la majorité des embranchements de ce règne, alors qu 'auparavant les animaux ne présentaient que des symétries radiales d'ordre 4, 6 ou même 5 (pensons aux étoiles de mer), qui sont toujours fréquentes chez les invertébrés. Dans l'embryon humain la bilatéralité apparaît dès le milieu du premier mois. Elle se traduit par une perte de symétrie (en comparaison avec une symétrie sphérique des premiers stades de développement de l'embryon), avec trois dimensions distinctes, droite et gauche, avant et arrière, haut et bas. Cette dernière dimension est évidemment liée à la gravité.

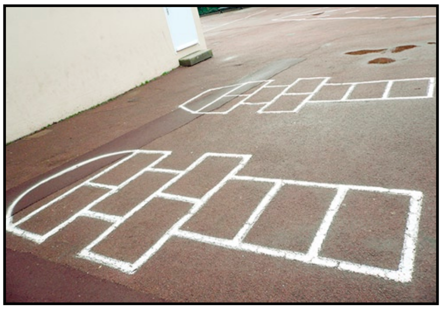
C'est sans doute ce qui explique que la symétrie bilatérale des humains était plutôt pour les Anciens un défaut par rapport à la symétrie parfaite représentée par le cercle ou la sphère. En témoigne le mythe développé par Phèdre, l'un des convives du Banquet de Platon, d'êtres humains originaux sphériques, que Zeus pour les punir aurait fait couper en deux, en en faisant les bipèdes que nous sommes, quitte à quelques réajustements pour l'orientation de la tête et des parties génitales.

La symétrie bilatérale est fortement ancrée dans notre inconscient. La fleur de Lys de la royauté française stylise la fleur… d'iris en accentuant sa symétrie bilatérale. Une tache d'encre semble insignifiante, mais si nous replions le papier pour obtenir une image symétrique, elle semblerait pleine de signification : c'est le classique test de Rorschach utilisé pour révéler l'inconscient. Quelles sont les raisons profondes qui ont fait imaginer par les monarchies autrichiennes et russes un aigle à deux têtes, monstre à la parfaite symétrie bilatérale ?

La symétrie bilatérale est omniprésente chez les êtres humains, les animaux, avec des aspects merveilleux comme les ailes de papillon, les plumages des oiseaux, etc. Ainsi du fait de cette imprégnation par notre environnement, il n'est pas étonnant que notre sensibilité à la symétrie

Néolithique
Musée d'Archéologie Nationale





La marelle

Plan de l'abbaye de Cluny.
Issu du Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI^{e} au XVI^{e} siècle, par Eugène Viollet-Le-Duc, 1856.

bilatérale remonte aux temps les plus anciens : songeons aux bifaces de la préhistoire, dont la symétrie peut paraître peu utile, voire inutile pour la fonctionnalité de l'outil ou, à une époque plus récente, les merveilleuses lames de silex dites en feuille de laurier ou en feuilles de saule, puis les haches en pierre polie si parfaites, achèvement d'une évolution plurimillénaire.

Les arts décoratifs ont largement usé de cette symétrie depuis les rouleaux assyro-babyloniens, les vases de Suse, les bronzes chinois Shang, et tous les bas-reliefs décoratifs, etc, jusqu'aux formes architecturales : temples grecs ou égyptiens, temples hindous, mosquées ottomanes, cathédrales gothiques, monuments modernes de prestige (palais, opéras, gares…).

La symbolique comparée des églises sur plan centré ou basilical a été source d'hésitations entre les deux modèles (cf. le plan centré original de Saint-Pierre de Rome conçu par Bramante et Michel-Ange et sa transformation en plan basilical par Carlo Maderno, sur ordre du pape !).

Ce plan « basilical » est très ancien : on le retrouve notamment dans un jeu qui est dessiné sur le sol des cours de récréation des écoles primaires : la marelle, qui s'offre le luxe d'un double transept — tel celui de l'abbatiale de Cluny — et dont la signification symbolique est évidente (de la terre au ciel) [7].

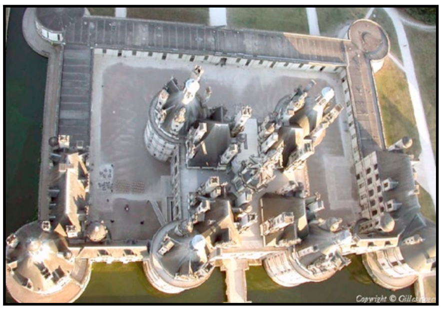
Cette parfaite symétrie bilatérale semble une constante de l'art français : pensons à la plupart des châteaux de la Renaissance ou de l'époque classique (une façade encadrée de deux ailes) ou aux jardins de Vaux-le-Vicomte et de Versailles et de tant d'autres… Mieux encore on peut avoir affaire à une double symétrie autour de deux directions orthogonales (symétrie de la croix), comme dans les tétrapyles des villes antiques (celui de Palmyre est célèbre) ou au château de Chambord, exemple quasi unique par son plan en croix grecque avec un escalier central dans l'axe de symétrie (j'y reviendrai plus loin). Versailles nous offre tous les exemples de recherche de symétrie, château et jardins, qui devait hanter les esprits de J. Hardouin-Mansart et de Le Nôtre... La façade nord du château de Saint Germain manque de symétrie : mais les gravures anciennes montrent que les agrandissements dessinés pas Hardouin-Mansart la rendaient parfaitement symétrique !

Même l'époque du baroque, malgré sa prolixité et son amour des courbes, n'a pas failli aux règles de la symétrie (voir les façades, les coupoles ou les grands retables). Que dire des néo-classiques (l'église de la

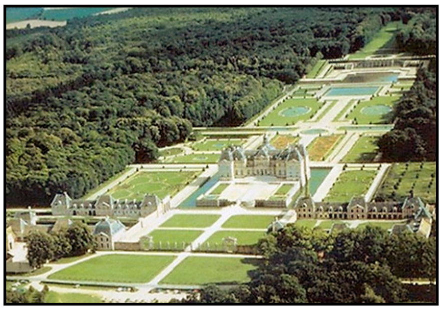
---

7 Le jeu lui-même joue avec la symétrie : le joueur doit marcher à cloche-pied sur les cases simples — brisure de symétrie !—, mais symétriquement sur les deux pieds pour les cases doubles.

Saint Germain en Laye



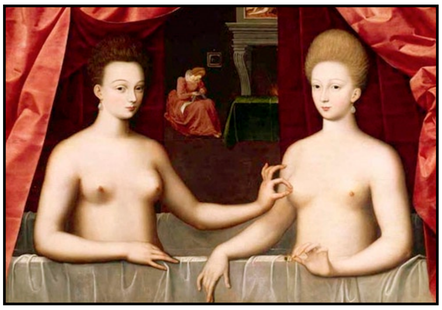
Chambord



Vaux-le Vicomte

l'École d'Athènes
Raphaël, Chambre de la signature, Vatican

Gabrielle d'Estrées et sa soeur (1594)



Le Mariage de la Vierge
Raphaël (à gauche) et Pérugin (à droite)

Madeleine à Paris ou celle de Saint Germain-en-Laye) et autres néo's. Les artistes de la Renaissance italienne du quattrocento furent littéralement subjugués par la symétrie bilatérale : peintures et monuments en témoignent. Voir par exemple la couverture du beau livre de Fernand Braudel. Leonard de Vinci, Albert Dürer et tant d'autres ont énormément réfléchi et écrit sur la symétrie : on peut parler à cet égard d'une véritable fascination.

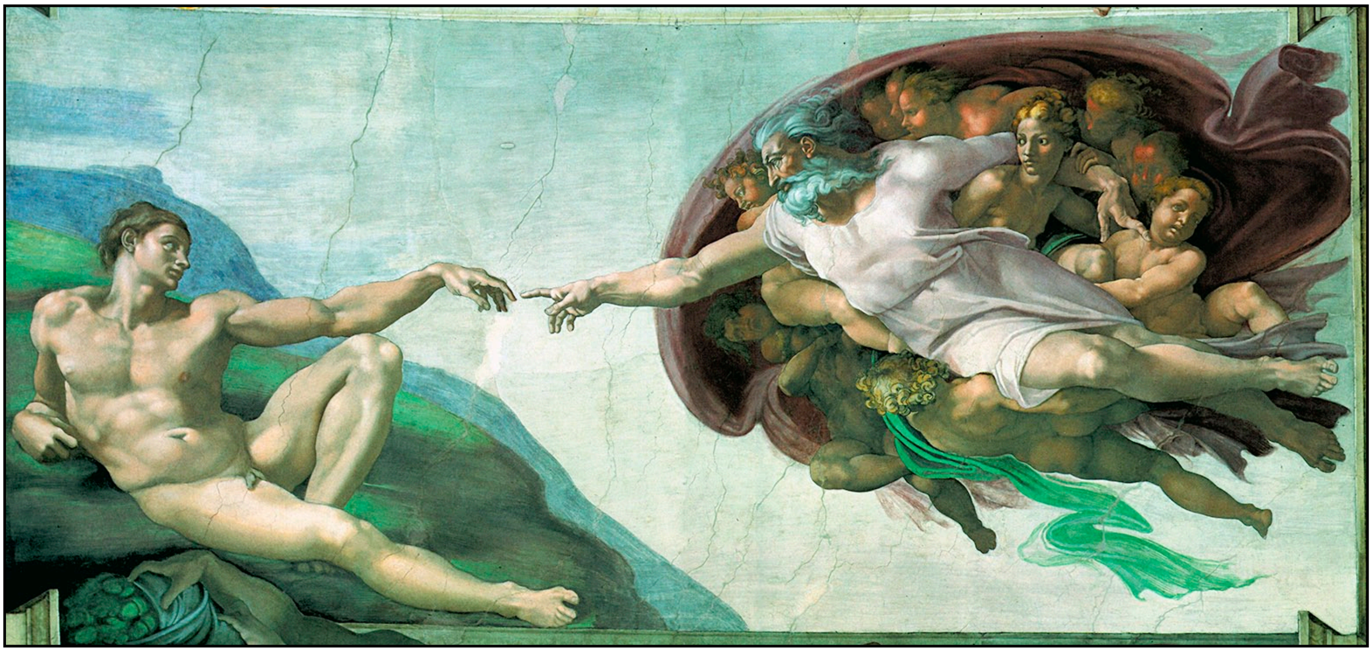
Mais il est difficile de se tenir à ce haut niveau, au risque de sombrer dans l'ennui, comme en témoignent de nombreuses oeuvres « académiques » telles de nombreuses fresques des absides d'églises du XIX^{e} siècle.

Cependant une parfaite symétrie risque d'engendrer l'ennui ou pire, témoin l'âne de Buridan : espérons qu'il brisera la symétrie pour ne pas crever de faim ou de soif ! Les églises gothiques de Viollet-le-Duc (ci-contre) et de ses disciples n'engendrent pas l'émotion des cathédrales médiévales avec leurs « imperfections ». Il est remarquable qu'à côté d'œuvres d'une symétrie bilatérale parfaite, on observe chez les grands artistes de subtils écarts à cette symétrie. Songeons aux fresques des Chambres du Vatican de Raphaël ou comparons le Mariage de la Vierge peint par Le Pérugin ou par Raphaël, une phrase de l'ouvrage déjà cité de Montesquieu illustre parfaitement cette différence :

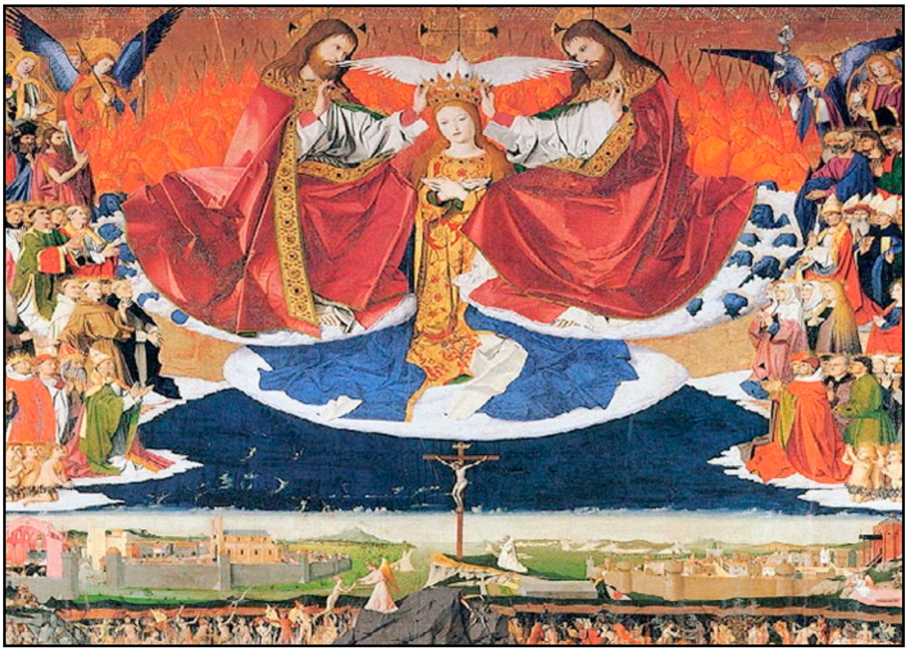
> « *Si la nature demande des peintres et des sculpteurs de la symétrie dans les parties de leurs figures, elle veut au contraire qu'ils mettent des contrastes dans les attitudes* ».

Diderot faisait de semblables remarques dans un de ses salons. Les grands peintres ont su réaliser cette exigence.

Ces écarts à une rigoureuse symétrie peuvent avoir une portée esthétique, comme dans les exemple précédents, mais aussi une portée philosophique : les postures des deux personnages centraux (Platon et Aristote) de l'Ecole d'Athènes — fameuse fresque de Raphaël au Vatican — en disent long sur leurs doctrines respectives.



Dieu donnant la vie à Adam
Fresque du plafond de la chapelle Sixtine, peinte par Michel-Ange entre 1508 et 1512



Le couronnement de la Vierge
Enguerrand Quarton (1454)

Le miroir et la chiralité

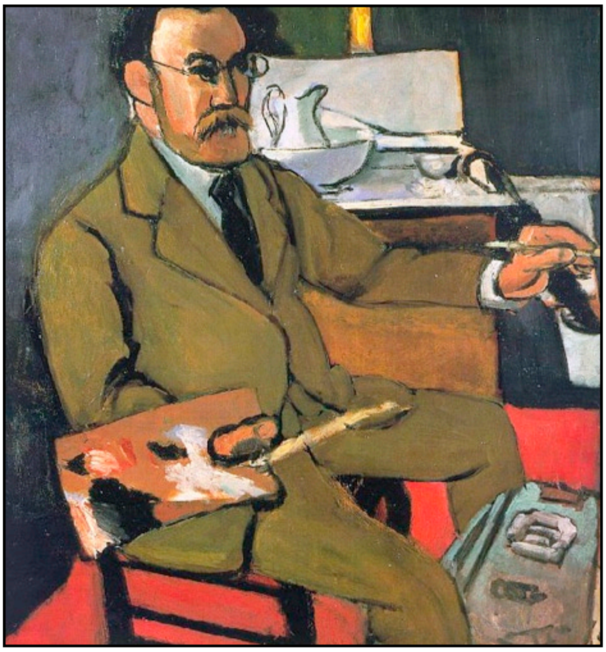
La symétrie bilatérale nous pose une grave question : par translation, un objet reste identique à lui-même : voyez toutes les frises décoratives sur les vases, les monuments de tous ordres, comme je l'ai rappelé plus haut. Mais la main gauche n'est pas superposable à la main droite ! La droite et la gauche : une distinction qui remonte à nos origines avec leur signification morale : gauche, *sinister*, *sinistrum* en latin, opposé à la droite *dexterum*. Les élus se placent à la droite de Dieu, les mauvais vont avec les boucs à la gauche… Bons ou mauvais présages chez les Grecs et les Romains d'après le vol d'oiseaux. La dextérité est une qualité.

On pourrait gloser longuement sur toutes les oppositions gauche-droite. Mais d'où vient le choix, la préférence ? Quand on regarde vers le midi, le soleil se lève à gauche, se couche à droite. Notre cœur est situé à gauche. Notre cerveau présente bien une symétrie bilatérale pour sa morphologie, cependant ce n'est pas vrai pour sa fonctionnalité (le cerveau gauche, site du langage par exemple). Cette dissymétrie de fonctionnalité du cerveau n'est pas le privilège de l'espèce humaine : elle a été observée chez de nombreux animaux et son origine remonterait à des temps très anciens (ère secondaire ?). Pourquoi écrire de gauche à droite plutôt que l'inverse ? Est-il naturel de visser par rotation à droite ou est-ce le résultat d'une éducation ? (cf. la blague du tire-bouchon gauche !) Le sens des aiguilles d'une montre (*clockwise*) a-t-il été choisi arbitrairement ou cache-t-il une signification profonde ? Il est curieux que les fresquistes des tombes égyptiennes n'aient souvent pas su (voulu ?) faire la distinction : les personnages en posture de prière ont les deux mains identiques !

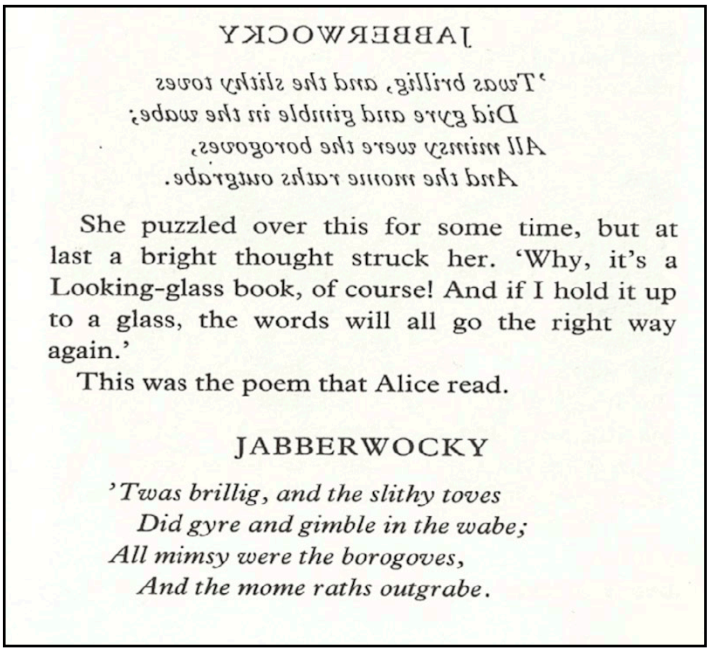
Dans les Annonciations, l'ange Gabriel est à gauche dans la très grande majorité des cas[8]. Mais Marie tient son enfant Jésus toujours du côté gauche au XIVe siècle, comme dans les maternités antiques, mais aussi bien d'un côté que de l'autre aux XVe et XVIe siècles. Dans la fresque de Michel-Ange l'Eternel tend à Adam sa main droite : mais Adam répond avec la gauche : tout le malheur des hommes symbolisé par l'artiste ?

Un autre exemple me paraît quelque peu perturbant : le Couronnement de la Vierge par Enguerrand Quarton, que l'on peut admirer à Avignon, est construit suivant une symétrie rigoureuse : on ne sait plus qui est le Père, qui est le Fils, des deux personnages qui cou-

8 Cette position s'explique probablement par le geste de bénédiction de la main droite de l'ange, comme on le voit bien dans les icônes byzantines – ou dans le célèbre tableau de Leonard de Vinci.



Matisse était-il gaucher ?



JABBERWOCKY

'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

She puzzled over this for some time, but at last a bright thought struck her. 'Why, it's a Looking-glass book, of course! And if I hold it up to a glass, the words will all go the right way again.'

This was the poem that Alice read.

JABBERWOCKY

'Twas brillig, and the slithy toves
Did gyre and gimble in the wabe;
All mimsy were the borogoves,
And the mome raths outgrabe.

Throuh the looking glass
(Au-delà du miroir)
Lewis Carroll

ronnent Marie, personnages parfaitement symétriques, si bien que l'un bénit de la main droite, l'autre de la main gauche !

Mais comment le peintre face au miroir s'arrange-t-il pour exécuter son autoportrait ? L'Alice de Lewis Carroll comprend très vite comment lire dans le monde du miroir !

Il nous faut maintenant revenir sur cette distinction fondamentale gauche-droite que les savants ont baptisé « chiralité », du mot grec qui signifie la main, afin de rappeler concrètement le concept d'origine (le mot fut créé par Lord Kelvin en 1890 pour signifier la dissymétrie moléculaire). En effet les dénominations droite-gauche ne peuvent être comprises que si l'on montre les deux mains correspondantes [9]. A priori, rien ne distingue un objet de son image dans un miroir : si l'on vous présente un film ou des diapos avec une inversion gauche-droite des images, vous ne vous en apercevrez probablement pas immédiatement [10], ce qui ne serait pas la cas si l'on avait inversé le haut par rapport au bas, ou le temps en déroulant le film à l'envers ! La pesanteur d'une part, la « flèche du temps » d'autre part imposent leur sens dans les deux dimensions correspondantes. Les deux autres dimensions de l'espace n'ont pas de sens imposé et sont soumises à notre arbitraire. Le sens de rotation des aiguilles d'une horloge, le sens de l'écriture ont été choisis par convention (ce dernier varie suivant les cultures et les traditions).

L'image d'un objet plan tel qu' un **L** ou un **W** donnée par un miroir perpendiculaire à ce plan lui est superposable par une simple rotation autour d'un axe. Il n'en va plus de même si l'objet possède une troisième dimension dans une direction parallèle au miroir, le **L** ou le **W** de notre exemple ayant une certaine épaisseur : celui-ci par sa dimensionalité induit une perte de symétrie.

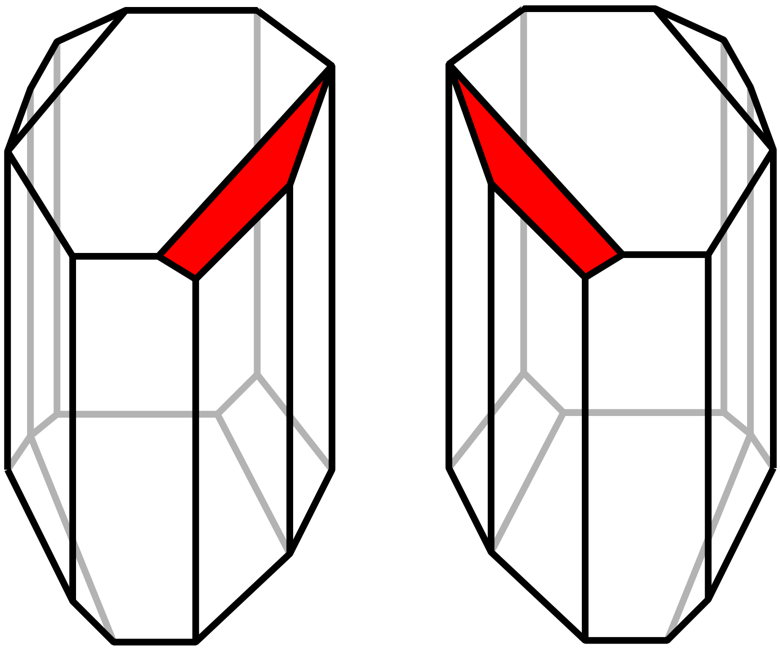
Un exemple simple de cette propriété nous est donné par un objet tout à fait courant : les dés à jouer ; regardant la face VI tournée vers le haut et face I opposée vers le bas, la suite des faces latérales peut suivre l'ordre II, IV, V, III (de façon que la somme des valeurs de deux faces opposées soit toujours égale à 7), soit sans le sens des aiguilles d'une montre, soit sans le sens inverse ! Le dé à jouer est un objet chiral.

En toute généralité un objet est chiral s'il n'est pas superposable à son image dans un miroir plan ; exemples : les mains, les chaussures, les gants, les dés,… Il est curieux que les anciens n'aient pas perçu l'importance (l'existence ?) de cette caractéristique [11].

9 D'où le terme anglais : handedness.

10 À part le cas d'une inscription ou de la position du volant dans une automobile. Qui n'a pas eu des difficultés de ce genre avec ses diapositives ? Combien d'illustrations dans les magasines sont inversées !

11 Bien que quelques uns de polyèdres étudiés par Archimède soient chiraux.



Hémiédrie de cristaux de tartrate énantiomères

Les lois de la mécanique céleste sont symétriques : c'est une condition implicite. Comme l'écrivait en 1951 l'illustre mathématicien Hermann Weill :

« Dans toute la physique, il n'y a aucune évidence d'une différence intrinsèque entre gauche et droite. De même que tous les points et toutes les directions de l'espace sont équivalents, de même pour la gauche et la droite. Position, direction gauche et droite, sont des concepts relatifs ».

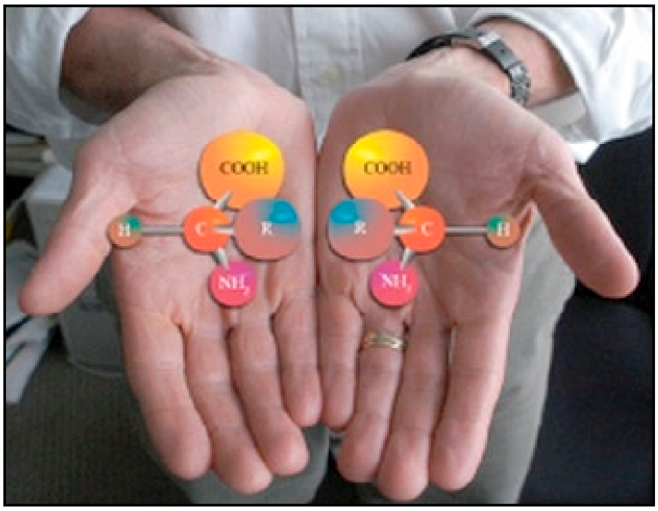
Assertion démentie quelques années plus tard ! J'y reviendrai plus loin.

Revenons au monde du vivant. Comment, chez les animaux et les humains, à partir d'un germe va apparaître en quelques divisions cellulaires la bilatéralité de l'embryon, un côté droit et un côté gauche, et de plus un avant et un arrière : qu'est-ce qui commande cette perte de symétrie ? Est-ce là une caractéristique du vivant ? Plus tard dans son développement, l'organisme de symétrie bilatérale doit procéder à la formation d'organes latéralisés : coeur, foie, etc. les mécanismes de ces processus sont tout juste en voie d'élucidation.

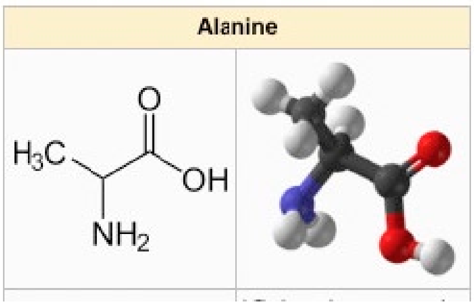
Pour comprendre l'importance de la chiralité, il nous faut faire un retour à la chimie classique en examinant une des toutes premières découvertes de Louis Pasteur. Il travaillait alors au début de sa carrière de chimiste (1848) sur l'acide tartrique et ses sels : l'acide tartrique est le principal acide du vin et le tartre au sens premier du terme est un de ses sels qui se dépose sous forme d'une croûte blanche, dans les récipients contenant du vin, un phénomène connu depuis l'Antiquité. Pasteur observa que les solution de tartre se distinguaient de ses sels synthétisés au laboratoire par une propriété physique remarquable : leur action sur la lumière polarisée — rappelons que les vibrations lumineuses subissent dans certains milieux dits « actifs » une rotation que l'on met en évidence grâce à des filtres, popularisés de nos jours avec les verres « polaroïds » des lunettes pour la vision en relief au cinéma par exemple. Il eut la patience d'observer au microscope les petits cristaux synthétiques préparés au laboratoire et de s'apercevoir — ce qui ne crevait pas les yeux — qu'une de leurs petites facettes se situait tantôt à gauche, tantôt à droite. Pasteur en fit le tri manuellement et tout rentra dans l'ordre : les solutions de cristaux triés agissaient bien sur la lumière polarisée, la faisant tourner pour les uns à droite, pour les autres à gauche [12]. Quant aux cristaux du produit naturel, ils se trouvaient systé-

---

12 Pasteur écrit : « Quand je veux une déviation à droite, je choisis des cristaux hémièdres à droite ; quand je veux une déviation à gauche, je choisis des cristaux hémièdres à gauche. Il m'est arrivé aussi de n'avoir pas de déviation, c'est que j'avais pris des cristaux mêlés sans faire aucun choix. »



Cliché Argonne national Lab



La L-alanine est un des principaux acides aminés, constituant des protéines. Son symétrique n'existe pas dans le vivant.

matiquement lévogyres (faisant tourner la polarisation de la lumière à gauche) !

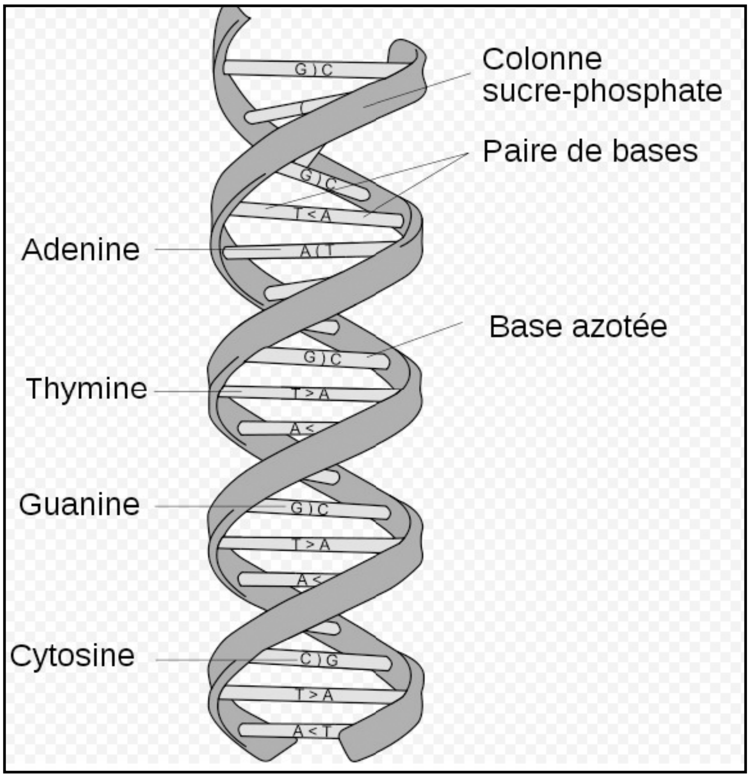
C'était une découverte capitale : l'homochiralité des processus du monde vivant, c'est à dire le fait que les organismes vivants ne produisent qu'une des deux formes possibles des molécules, à l'exclusion de l'autre, au contraire de la production en laboratoire par les méthodes classiques de synthèse chimique. Comme le soulignait Pasteur, c'est là que réside la seule ligne de démarcation qui peut être dessinée entre la matière inerte et la matière vivante. Pasteur vit ses idées confirmées dans ses premières études sur les fermentations, alcoolique, lactique… : la dissymétrie chirale des produits chimiques résultant de ces processus est due à l'action d'êtres vivants, identifiant du même coup la nature réelle des ferments — les levures — qui faisait alors objet de débats. La synthèse en laboratoire conduit à des quantités égales des deux formes droite et gauche d'un composé chimique, ce que l'on appelle un mélange racémique [13].

L'origine de cette chiralité réside dans une propriété fondamentale de l'atome de carbone : celui-ci possède 4 liaisons chimiques disponibles. Si les atomes ou groupes d'atomes qui se lient à cet atome de carbone sont différents, la molécule résultante est asymétrique, elle peut être droite ou gauche. Les deux formes symétriques sont appelées énantiomères (*ἐναντίος* = vis-à-vis) et appelées respectivement *L* et *D*, ou *R* et *S*, suivant des conventions adoptées universellement (qui n'ont plus rien à voir avec le caractère *lévogyre* ou *dextrogyre* qui avait été à l'origine de cette distinction).

La découverte de Pasteur s'est avérée absolument générale : toutes les molécules du vivant sont chirales. Les 20 acides aminés — comme l'alanine (figure ci-contre) — constituants des protéines sont tous, sauf un qui n'est pas chiral, de la forme dite *L* [14]; celle-ci impose la structure des protéines : les acides aminés s'assemblent en formant des hélices dites α enroulées à droite et des feuillets β tordus gauches, ce qui restreint les possibilités topologiques de la molécule construite à partir de ces éléments structuraux. C'est seulement sous cette seule forme des feuillets β des protéines que celles-ci possèdent leur activité enzymatique. L'hélice de l'ADN, notre matériel génétique, s'enroule à droite, cette hélicité est déterminée par la forme gauche des glucides (les sucres) qui constituent l'ossature de la molécule d'ADN. Les récepteurs des cellules ne se lient qu'à l'un des énantiomères de la molécule cor-

13 Du latin *racemus* (grappe de raisin, raisin) terme proposé par Gay-Lussac: on revient aux origines des études du tartre.

14 Les acides aminés produits en condition abiotique sont répartis entre les deux formes.


Colonne
sucre-phosphate
Paire de bases
Adenine
Base azotée
Thymine
Guanine
Cytosine

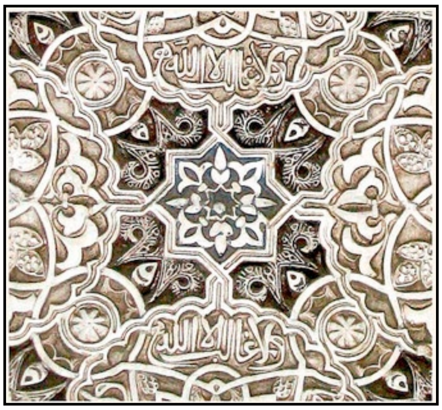
respondante, de même pour le couple antigène-anticorps : ces couples sont souvent comparés à la serrure et sa clef correspondante — unique ! Qui plus est, la même molécule suivant qu'elle est gauche ou droite n'a pas les mêmes propriétés, notamment thérapeutiques. C'est le cas de la pénicilline, dont la découverte fut fortuite mais qui démontre l'importance capitale de la chiralité dans le *design* des médicaments.

L'aspartame est doux ou amer suivant que la molécule est gauche ou droite. Seule une des formes de la vitamine C est absorbée par notre organisme. L'un des énantiomères du carvone donne l'arôme du fenouil, l'autre de la menthe verte. Le limonène donne l'odeur de citron ou d'orange suivant sa forme droite ou gauche. N'est-il pas extraordinaire que nos sens olfactif et gustatif aient une telle sensibilité à des produits que la science fut longtemps incapable de différencier ? On pourrait citer de nombreux autres exemples de produits familiers : la liste est sans fin.

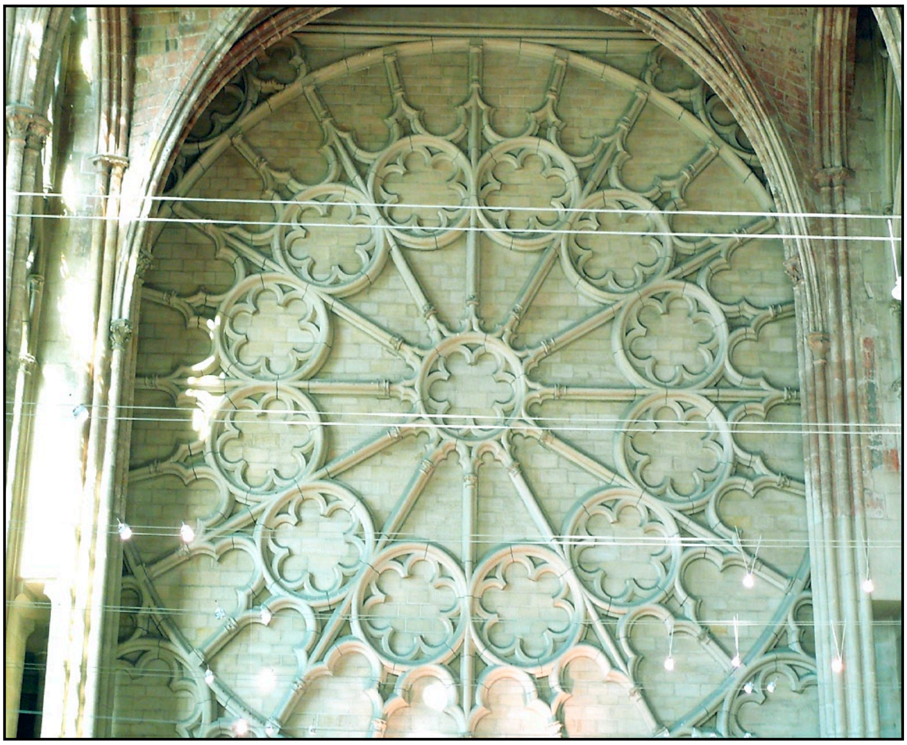
Imaginons la pagaille si les vis et les écrous étaient vendus en mélange racémique ! Essayez de marcher avec la chaussure gauche au pied doit ! Cette spécificité est d'une importance capitale pour les médicaments : une forme peut-être un remède et l'autre un poison. Un exemple tristement célèbre est celui de la thalidomide — mise sur le marché en 1957 : on la recommandait aux femmes enceintes comme sédatif pour pallier les nausées : une forme (**R**) possède bien cet effet, mais l'autre (**S**) est tératogène. Malheureusement ces formes sont instables et le produit se racémise naturellement dans l'organisme. On évalue de 8 000 à 12 000 le nombre d'enfants nés avec de graves malformations dues à ce médicament. En revanche ce produit est toujours utilisé… pour soigner la lèpre.

Une des principales difficultés dans la synthèse des médicaments est d'assurer à un taux très élevé la bonne forme, le bon énantiomère à 100% si possible, ce que réalisent automatiquement les produits naturels. Or les deux énantiomères ont mêmes propriétés physiques (température d'ébullition, solubilité…) : leur séparation est donc très difficile par les moyens classiques, distillation par exemple. Suivant le principe de Curie, dont je reparlerai plus loin, la symétrie recherchée doit se trouver dans la cause : la réponse est donc venue avec la catalyse asymétrique — avec un catalyseur chiral dit énantio-sélectif — découverte qui a valu à ses inventeurs un prix Nobel de chimie en 2001, un procédé qui avait été simultanément étudié et développé par H. Kagan à la Faculté des sciences d'Orsay[15]. C'est une approche concurrente de

15 Le ministre de la recherche de l'époque émit une protestation auprès du Comité Nobel.



Plafond – Alhambra Grenade



Chapelle du château de St Germain en Laye

la sélection de produits naturels, base des biomédicaments (ou biogénériques). Notons que la Nature pose un redoutable défi aux chimistes : c'est ainsi, parait-il, que la molécule de l'essence de térébenthine est droite si elle provient du pin d'Alep, gauche du pin de Bordeaux !

Cette asymétrie fondamentale du vivant pose une question sur son origine. A priori les synthèses chimiques sont indifférentes et les deux énantiomères seraient équiprobables : quelle condition physique, à l'origine de la vie, a-t-elle pu imposer le succès d'une forme chirale plutôt que de l'autre ? Pourquoi dans la Nature des acides aminés **L** et non **D** ? Pourquoi des hélices droites et non gauches ? Une fois le choix fait, on ne peut plus changer (cf. la clef et la serrure). De nombreuses explications ont été proposées, mais la réponse demeure à ce jour incertaine : c'est là une des grandes énigmes de la Nature. Mais il est bien connu que les commencements sont toujours obscurs…

Autour des axes de rotation

Passons à une opération de symétrie supplémentaire et tout à fait courante dans la décoration : la symétrie de rotation : en faisant tourner un motif autour d'un point d'un certain angle, on le superpose exactement à lui-même. Avec un cercle, n'importe quel angle de rotation superpose le cercle à lui-même, une propriété qui pour les anciens signifiait la perfection, et fut à l'origine d'un préjugé qui exigeait que les astres suivent des orbites circulaires : d'où le refus des ellipses proposées par Kepler. Avec un carré, ce sera un quart de tour ou un multiple du quart, avec un triangle équilatéral un tiers de tour, avec un hexagone, un sixième, etc. Cette symétrie a été largement exploitée dans l'art : songeons aux grandes roses de nos cathédrales avec leurs 12 ou 18 rayons, aux églises de plan en croix grecque (cf. le plan de Bramante pour Saint Pierre de Rome), aux mosquées ottomanes ou en Inde au Tadj Mahall ou encore au drapeau européen avec ses 12 étoiles [16] dorées à cinq rais disposées suivant un cercle sur fond azur.

La symbolique du plan en croix grecque de nombreux monuments semble universelle : c'est le cas de certaines églises, inspirées du Panthéon de Rome, de la rotonde — anastasis — du Saint Sépulcre à Jérusalem

16 Un grand signe parut dans le ciel: une femme enveloppée du soleil, la lune sous ses pieds, et une couronne de douze étoiles sur sa tête.
Apocalypse 12 : 1 (version Louis Segond)

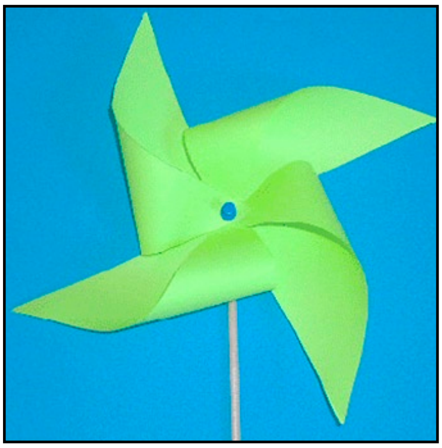
Autel gallo-romain
VII^e^ siècle – MAN

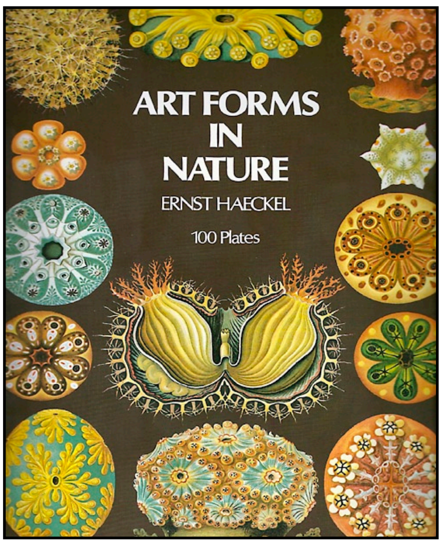
Mandala

Chypre
VII^e^ siècle av. J.C. – MAN

Pervenche – groupe cyclique C5
κίνησις ακίνητος

Rouelle
Tombes mérovingiennes de S^t^Denis – MAN





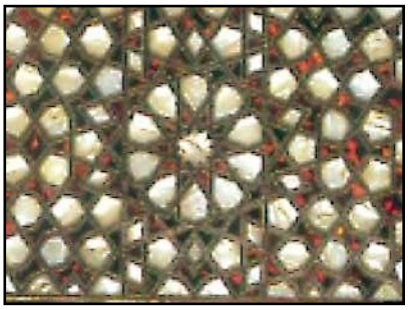
(cf. le plan de Bramante pour Saint Pierre de Rome), des mosquées ottomanes ou en Inde au Tadj Mahall. A Angkor Vat (Cambodge) ou à Borobudur (Java), c'est le symbolisme de la montagne sacrée qui a inspiré ce plan. Je reviendrai plus bas sur le cas singulier du château de Chambord.

Les décors des coupoles byzantines ou islamiques en donnent des exemples splendides. Cette symétrie est riche de symboles : les mandalas bouddhiques, sur la base de cercles et de carrés, servent de support à la méditation ; c'est aussi le cas de certains talismans au pouvoir supposé prophylactique. C'est certainement dans les arts de l'Islam, tant dans les cultures arabes que dans le monde ottoman, que les richesses de la symétrie ont été exploitées avec le plus grand brio et les plus grandes subtilités (monuments et leurs décor, manuscrits, tissus et tapis…).

La symétrie de rotation est courante dans la nature ; regardons les fleurs : la symétrie 4 des crucifères (giroflée), la symétrie 5 des rosacées (pommier, cerisier…) ou de la pervenche ou la richesse des symétries de la passiflore [17]. Mais les pétales des crucifères sont symétriques (groupe diédral D_n), ce qui n'est pas le cas de ceux de la pervenche : ils semblent tourner dans un sens à la manière du svastika (groupe cyclique C_n). Ce motif fameux est un très un vieux symbole comme le rappelle son nom sanskrit que l'on retrouve un peu partout et à toutes les époques [18] ; signe bienveillant au seuil des maisons en Inde, céramiques du monde méditerranéen, autels gaulois…

Sous sa forme dextrogyre, c'est la croix gammée — d'après la forme des bras en gamma — à la signification hélas détournée pas les nazis. Je citerai encore la croix basque (lauburu) et dans un tout autre domaine les ailes d'un moulin-à-vent [19] ou les aubes des hélices de propulsion. Souvenons-nous de ce petit jouet distribué dans les fêtes foraines, il peut être dextrogyre ou lévogyre : c'est sa dissymétrie qui lui permet de tourner au souffle du vent.

On retrouve les mêmes schémas autour de la symétrie ternaire avec le triscèle celtique (ou triskel irlandais). Dans tous ces motifs la symétrie de rotation est abaissée, les bras de la croix n'étant pas symétriques, contrairement à la croix de Malte ou à la croix pattée par exemple. Il est très remarquable que les décorateurs de l'Islam avaient su exploiter la symétrie d'ordre 5 : si on ne la trouve pas en Andalousie, par contre on en observe des exemples au Maroc et dans l'empire Ottoman.



17 Avec 3 étamines, 5 pistils, une double couronne de filaments colorés et une corolle de 5 pétales et 5 sépales pétaloïdes, la passiflore accumule les groupes d'espace D3, D5, D10 et Dn !

18 Le timbre personnel d'Alexandre Bertrand (premier directeur du Musée des Antiquités nationales) est un ovale dont le centre figure … un svastika !

19 Les archéologues ont démontré que le plan primitif du donjon de Chambord n'était pas une croix grecque simple (un plan exceptionnel !) mais du type svastika (plan dit « giratoire »), ce qui devait donner une signification symbolique au monument et renforce l'attribution de ce plan à Leonard de Vinci (mort peu de temps avant le début des travaux).

Place de l'Étoile, Paris

Iznik – XVIe siècle

Le plus grand labyrinthe végétal du monde à Regnac-sur-Indre
Indre-et-Loire, France

Nef – Cathédrale de Chartres

Les botanistes ont classé les types d'inflorescences en fonction de leurs symétrie (grappe, ombelle, épi, corymbe, cyme, etc.). Avec la disposition des feuilles autour de la tige, les plantes nous offrent d'autres exemples : feuilles opposées par leur point d'attache, ou verticillées, ou encore alternées. Je reviendrai sur cette dernière disposition plus loin, à propos de l'hélice. Une convergence de la science et de l'art a fait la popularité d'Ernst Haeckel à la fin du XIXe siècle. Pour Ernst Haeckel (1834-1919) la biologie était fortement apparentée avec l'art. Son talent artistique fut fortement marqué par la symétrie présente dans la nature, entre autres celles des microorganismes monocellulaires comme les radiolaires. Ses images d'organismes présents dans le plancton ainsi que de méduses, illustrant l'impressionnante beauté du monde biologique, obtinrent une célébrité particulière. Si le succès était déjà présent avec ses monographies scientifiques, ses populaires ouvrages *Kunstformen der Natur* (les formes d'art de la nature) qui parurent de 1899 à 1904 sous la forme de nombreux cahiers, appartenaient, parait-il, en Allemagne au foyer de chaque personne cultivée [20]. Cette géométrie fondée sur une symétrie de rotation autour d'un point ou d'un axe nous est en fait très familière : c'est la structure en étoile, dont la place parisienne du même nom, nous offre un exemple typique.

A part le cas de l'axe ternaire, la plupart des figures sont construites autour d'un axe 4, 6, 8, 12, etc, c'est à dire une puissance de 2. Les axes d'ordre 5 ou 7 semblent exceptionnels.. J'en reparlerai plus loin à propos des pavages du plan. Les artistes ont réussi, suprême astuce, des pseudo-symétries, qui excitent la curiosité de l'observateur, tel ce plat en céramique d'Isnik !

Un autre exemple est le labyrinthe, un schéma qui remonte à une haute antiquité et dont la signification symbolique a varié au cours des âges : le labyrinthe ou le détournement de la symétrie. Sans remonter à la Crète et à Dédale, je citerai, pour rester proche dans notre pays, les labyrinthes qui s'inscrivaient dans le pavage des nefs des cathédrales gothiques, dont il ne subsiste que peu d'exemplaires. Leur apparente symétrie cache un parcours compliqué. Celui de Chartres est un des plus connus : avec un diamètre de 12 mètres sur la base de onze cercles concentriques, il oblige le pèlerin à un parcours de 150 mètres ; celui d'Amiens (restitution moderne) suit le même plan avec des segments rectilignes et impose un parcours de 234 mètres.

A des époques plus récentes des labyrinthes végétaux ont été plantés dans des parcs, à Chantilly ou à Reignac sur Indre par exemple.

20 Son ouvrage Les énigmes de l'univers (1899) fut publié à 400 000 exemplaires et traduit en 12 langues. Haeckel est le créateur du mot écologie.

Seville/Real Alcazar: motif dit pajarita; rotation de 120°

Jeu des entrelacs Alcazar Seville

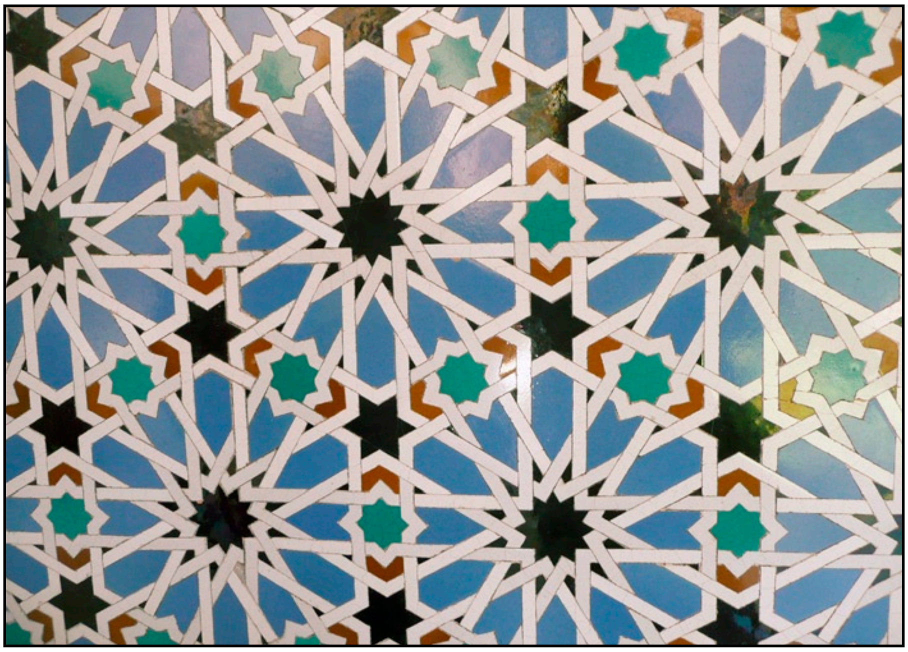
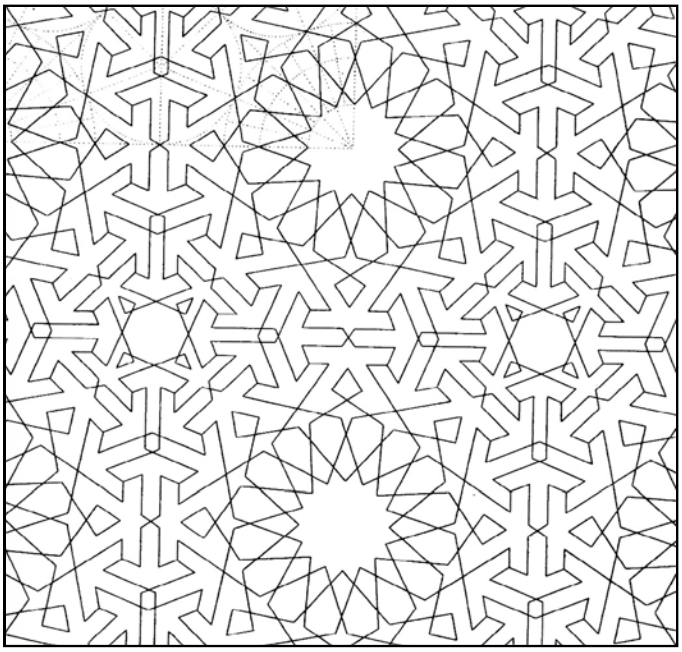


Planche 153 de J. Bourgoin

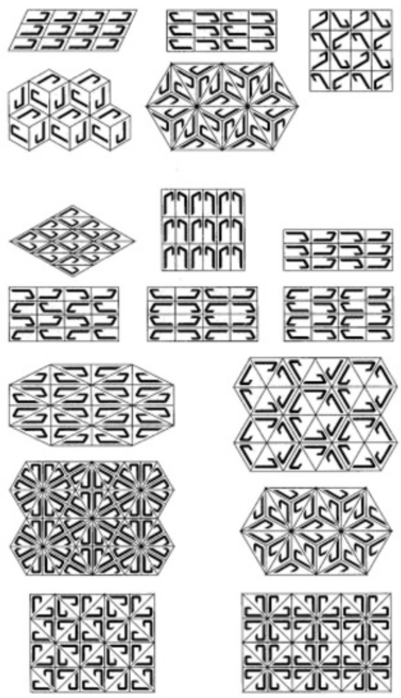


Les pavages dans le plan

La géométrie du plan nous est égalent tout-à-fait familière avec les pavages et les mosaïques. Paver le plan avec des formes simples d'un seul type n'est possible qu'avec des carrés et des triangles (ou leurs dérivés losanges et hexagones) : exemple les tomettes traditionnelles. Mais c'est impossible avec des pentagones ! En disposant des pentagones côte à côte, on laisse obligatoirement un espace vide, à moins d'utiliser des pentagones irréguliers, dont l'exemple le plus connu est le pavage du Caire (observé parait-il dans les rues de cette ville) [21]. Avec des rectangles, il faut les disposer avec leur grand côté alternativement dans une direction et dans la direction perpendiculaire. En combinant deux types de polygones réguliers, triangles équilatéraux, carrés et hexagones, on peut réaliser huit — seulement huit — modèles de pavage. Seuls les points de jonction à trois, quatre ou cinq branches sont permis.

En enrichissant le motif de base par des opérations de symétrie locale, de nouvelles combinaisons sont possibles. La situation est plus compliquée que dans le cas des frises, puisque le motif de base doit pouvoir être répété par translation dans les deux directions de l'espace sans chevauchement ni lacune. Au total en combinant toutes les opérations de symétrie possibles : translations, rotations, réflexions-miroirs et glissements (réflexion suivie d'une translation) du motif de base, le mathématicien Fedorov (de S^t Petersbourg) pu démontrer en 1891 qu'il y a 17 façons — seulement 17 — de paver le plan ! Ces 17 groupes sont explicités dans la figure ci-contre sur la base d'un motif très simple mais non symétrique, une espèce de crochet en forme de L. Ce qui est extraordinaire, c'est que bien avant cette démonstration, les décorateurs de l'Alhambra de Grenade avaient réalisé toutes ces 17 opérations dans les zelliges ou azulejos en mosaïques de marbre, les plafonds artesonado, les claire-voies des fenêtres et les décors des portes.

C'est là un résultat prodigieux et inégalé [22]! Personnellement je n'ai pas réussi — manque de temps sans doute — à compter celles du Real Alcazar de Séville, mais leur variété est impressionnante. Tous les axes de symétrie y sont des multiples de 2 : beaucoup de 6, 12 et 24, pas mal de 8 et 16. Il en résulte un plus grand nombre d'opérations de symétrie possibles. Par contre aucun pentagone en Andalousie, alors que l'on trouve des motifs basés sur le pentagone et l'heptagone à Damas et au



Les 17 classes de pavage du plan

21 Il s'agit en fait d'un pavage à base d'hexagones aplatis, chaque hexagone étant divisé en 4 pentagones irréguliers, possédant deux angles droits.

22 Les auteurs ne sont pas tous d'accord sur ce point : certains n'observent que 13 groupes — ce qui est déjà tout à fait remarquable.

M. Escher

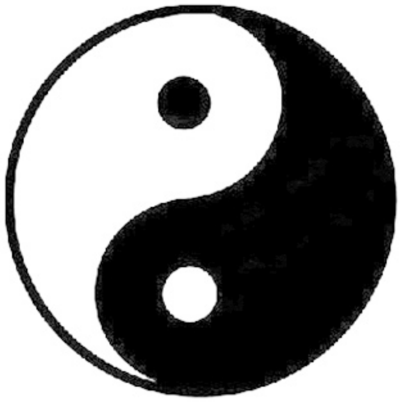
M.Escher – étoiles de mer, palourdes et gastéropodes

Institut Paléontologie humaine – Paris

Chapelle Château d'Anet

Caire. Les artistes ont encore enrichi ces dessins par des familles d'entrelacs et le jeu des couleurs. Impressionnant !

Selon le mathématicien Hermann Weyl que j'ai déjà cité plus haut : « On peut difficilement surestimer la profondeur de l'imagination géométrique et de l'inventivité que révèlent ces motifs. Leur construction est loin d'être mathématiquement triviale. Le fait qu'il y ait exactement 17 groupes de symétries, connu implicitement déjà par les artistes de l'antiquité, n'a été prouvé « mathématiquement » que quelques siècles plus tard ! En 1879, un architecte, Jules Bourgoin, a publié un atlas de 190 planches de dessins illustrant la richesse des variations possibles sur cette base géométrique.



Les choses se compliquent si l'on introduit des couleurs : des objets symétriques ne le sont plus s'ils sont colorés différemment, ou plutôt présentent un type de symétrie différent. C'est le cas du bien connu symbole chinois ying-yang.

Le grand artiste graveur Maurits Escher (1898-1972) a exploré toutes les possibilité de pavage du plan sur la base de motifs doubles (l'un comblant les vides laissé par l'autre), triples ou quadruples. Un prodigieux exercice à base de poissons, d'oiseaux, d'insectes, de fleurs, et autres motifs ! Exploitant les symétries noir-blanc ou polychromatiques, il ne réalisa, dit-il, qu'au bout de nombreuses années qu'il faisait de la cristallographie sans le savoir ! Fasciné depuis toujours par les dessins périodiques auxquels il s'essayait, il su transcender ses découvertes pour produire des gravures de très grande qualité artistique et de profonde poésie qui ont fait sa célébrité.

❦

Des spirales

Mais les combinaisons géométriques deviennent infinies, si l'on joue sur les dimensions des pavés. Un des exemples le plus remarquable — extraordinaire en fait, si vous ne le connaissez pas, allez-y rien que pour cela ! — c'est le pavage de la chapelle du château d'Anet (Eure et Loire), plus merveilleux que le beau pavage du Duomo de Florence.

Le dessin en est la projection sur le sol du motif des caissons de la coupole. En projection, cela donne des spirales, 18 spirales tournant à gauche et autant à droite ; de plus leur largeur croît du centre vers la

Disque de Phaistos
Musée d'Heraklion, Crète

Tombeau de J. Bernouilli

Tournesol, une des familles de spirales est surlignée rouge (21/34)

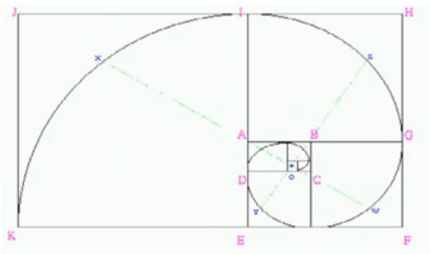
Cône de pin (8 et 13)

périphérie : c’est un dessin très compliqué, mais qui suit des règles très strictes. Le plus étonnant, me semble-t-il, fut le calcul de la forme et des dimensions des carreaux individuels. D’où venait l’inspiration de l’artiste ?

Cette courbe, la spirale, a toujours exercé une profonde séduction : c’est ainsi qu’on la trouve entre autres dans le mystérieux disque de Phaistos (en Crète), souvent dans le décor des objets celtes et qu’elle réapparait dans le triskel irlandais ou dans le jeu de l’oie formé de 63 cases disposées au long d’ une spirale !

On peut aussi penser aux ocelles des plumes de la queue du paon qui sont disposés à l’intersection de deux familles de spirales qui tournent en sens opposés. La spirale et l’hélice — il ne faut pas confondre ces deux courbes — ont beaucoup inspiré tant les artistes que les mathématiciens. Parmi les différents types de spirales la plus remarquable est la spirale logarithmique ou équiangle, ainsi nommée de par ses propriétés : plus on tourne en suivant la ligne spirale plus on s’écarte proportionnellement du centre. Je n’ai pas la place pour décrire d’autres propriétés, toutes remarquables, de cette courbe. Sa connaissance est due à Jacques Bernouilli, un mathématicien suisse qui l’étudia en 1792 sous le nom de spira mirabilis.

Son monument funéraire dans le cloître de la cathédrale de Bâle montre à sa base une spirale (malheureusement le graveur a dessiné une spirale d’Archimède, une courbe beaucoup moins intéressante que la logarithmique) avec cette magnifique sentence latine : *resurgo eadem mutata* (déplacée, je réapparais à l’identique).



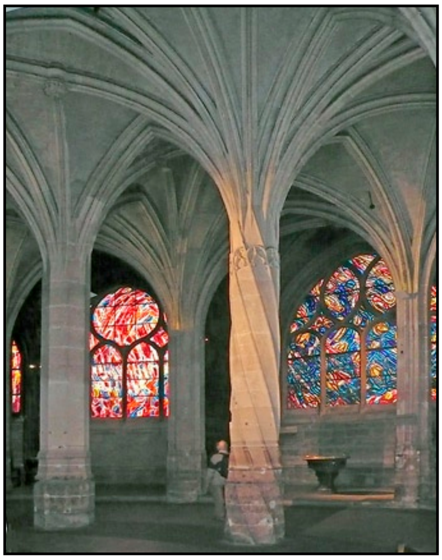
La spirale est très fréquente dans la nature : regardons la coquille de l’escargot, ou celle des ammonites, de nombreux coquillages et, parmi les fleurs, la marguerite ou mieux encore le tournesol qui nous offre un merveilleux exemple : au cœur de la fleur, les fleurons sont disposés aux intersections de deux familles de spirales tournant en sens opposés.

Une constante extraordinaire c’est le nombre de spirales : 21 dans un sens et 34 dans l’autre, ou bien 34 et 55. On retrouve ces nombres remarquables dans d’autres spirales qui se développent en volume, pomme de pin et ananas (qui en anglais se nomme justement *pine apple*), la même géométrie caractérisant la disposition des motifs. Sur n’importe quel ananas vous compterez 8 spirales dans un sens et 13 dans l’autre. Idem pour les pommes de pin à moins que ce soit 21 et 34 ou pour le chou romanesco (*Brassica oleracea var. Botrytis*) qui nous offre en plus une magnifique exemple de géométrie fractale.

Chou romanesco

Nébuleuse Messier 110 (Grande Ourse)

Apamée – Syrie



Saint Séverin – Paris

Ces exemples sont des illustrations de la loi dite de phyllotaxie. Tous les nombres que je viens de citer appartiennent à la fameuse suite de Fibonnacci, du nom d'un mathématicien italien du XII^e siècle, suite que l'on construit en ajoutant chaque terme au précédent pour obtenir le terme suivant :

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,…

Cette suite de nombres est très célèbre. C'est ainsi que les rapports entre deux termes successifs : $3/2$, $5/3$, $8/5$, $13/8$ … tendent à l'infini vers une valeur remarquable ($1/2$) ($1 + \sqrt{5}$), un nombre célèbre sous le nom de section d'or ou nombre d'or [23] ou encore *divine proportion*, étudié notamment par un mathématicien italien de la renaissance Luca Pacioli ; il a écrit plusieurs ouvrages, spécialement sur la perspective, et il enseigna les mathématiques à Leonard de Vinci.

On a pu démontrer que la croissance de ces objets doit obligatoirement suivre des lois mathématiques : la démonstration repose sur des hypothèses très simples qui modélisent la phyllogenèse et qui ont été vérifiées par des expériences de simulation, dans la lignée des simulations des ruches par Buffon dont je parlerai plus loin. Il en va de même pour la coquille des gastéropodes : la croissance de l'animal s'effectue par la formation d'une nouvelle cellule de même forme que la précédente — un mécanisme qui engendre nécessairement une spirale.Terminons en beauté, grâce à l'astronomie, avec une vue d'une nébuleuse spirale.

Des hélices

Une autre courbe, apparentée à la spirale, est l'hélice qui, contrairement à celle-ci, se développe dans l'espace. La forme la plus simple est une courbe qui s'enroule sur un cylindre : c'est la vis. Mais d'une manière générale elle peut s'enrouler sur un corps de révolution, comme un cône (sa projection sur le plan de base est alors une spirale). D'où la confusion entre les deux mots dans le langage courant.

23 Le nom « nombre (ou section) d'or » est une création moderne, alors que ce nombre était déjà connu d'Euclide. Il a fait l'objet de nombreuses spéculations à la suite du psychologue allemand Adolf Zeising (1854).

Colonnes salomoniques
Latour de Carol (Pyrénées orientales)

Val de Grâce – Paris

« IRSID » Saint Germain en Laye

La séduction de l'hélice se manifeste dans l'art. Je citerai par exemple les cannelures hélicoïdales des colonnes de la ville antique d'Apamée en Syrie ainsi que de nombreuses colonnes torses aux portails des églises romanes.

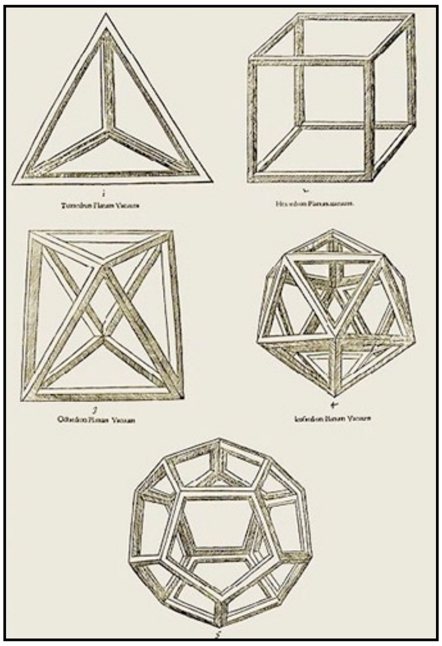
Tout le monde connaît les escaliers à vis — au fait tournent-ils indifféremment à droite ou à gauche ? — et même ce chef d'oeuvre de Chambord : la double vis (c'est à dire deux vis identiques décalées verticalement d'un demi pas, autrement dit au départ de 180°). Leonard de Vinci avait dessiné une quadruple vis (de section carrée) un dessin qui a peut-être inspiré Chambord. Un autre exemple des plus remarquables est la vis de Saint Gilles dans le Gard, chef d'œuvre des tailleurs de pierre romans qui suscite l'admiration depuis huit siècles : cet escalier possède une voûte hélicoïdale de 9 claveaux, chacun présentant une double courbure, convexe dans une direction, concave dans une autre, le tout parfaitement assemblé, triomphe de la stéréotomie ! Plus près de nous, dans un tout autre esprit, les colonnes salomoniques des retables baroques, ou du baldaquin de Saint Pierre de Rome, ou du Val de Grâce à Paris. Ce qui est remarquable est la symétrie bilatérale suivie par les artistes : à gauche de la niche centrale l'hélice est dextrogyre, et sa symétrique de l'autre côté du retable tourne à gauche, créant ainsi un mouvement vertical vers le ciel !

Salomon Guggenheim Museum – New-York

Pour poursuivre avec l'architecture, je citerai deux musées de plan hélicoïdal : le Solomon R. Guggenheim Museum à New-York et le Musée gallo-romain de Lyon-Fourvière. Et en tant que Saintgermanois, je ne peux oublier le bel escalier hélicoïdal en acier qui trône dans l'axe du hall central du bâtiment principal de ce que fut l'IRSID (Institut de recherches de la sidérurgie française).

Mais la nature elle-même connaît la vis : dans certaines plantes les attaches des feuilles sur la tige principale ou des branches sur le tronc se situent sur une hélice. Chaque feuille se déduit de la précédente par une rotation hélicoïdale d'une fraction de tour, suivant un angle constant pour une espèce donnée, tout le long de la tige, angle appelé divergence. On peut mesurer deux nombres entiers : le nombre de tours entre deux branches à l'aplomb l'une de l'autre et le nombre de branches intermédiaires entre ces deux-là. Oh surprise ! ces deux nombres appartiennent à suite de Fibonacci (2 et 5 pour le chêne ou l'abricotier, 3 et 8 pour le peuplier ou le poirier, paraît-il ! Je n'ai pas vérifié). D'ailleurs la divergence est approximativement une fraction d'un tour apparentée au nombre d'or : l'angle d'or égal à 137°. Les plantes grimpantes nous

Cérithe géant – École des Mines



D'après Leonard de Vinci, in L. Pacioli
De divina proportione (Venise,1509)

offrent aussi un exemple frappant : les haricots s'enroulent toujours à droite !

On retrouve l'hélice dans de nombreux gastéropodes, par suite de la croissance en spirale dans une troisième dimension, suivant le même mécanisme de croissance que pour la spirale déjà mentionnée plus haut. On peut se demander pourquoi la coquille de l'escargot est toujours dextrogyre !

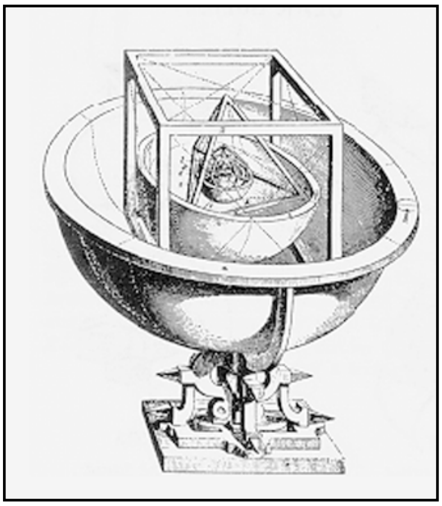
Un autre cas classique est celui de certains fossiles très courants (les pierres du calcaire lutécien de nos monuments en sont souvent truffées) : les cérithes ; là aussi on observe une vis droite.

Les polyèdres et les pavages de l'espace

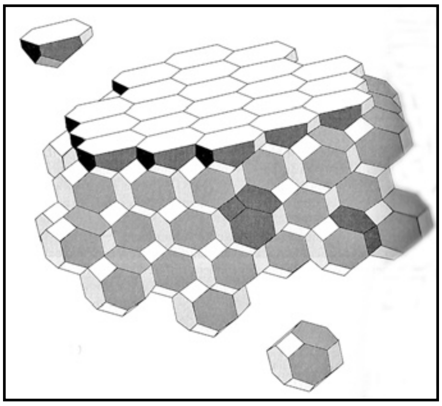
Revenons au problème du pavage, mais maintenant dans l'espace à trois dimensions. « Il est correct qu'après la deuxième dimension on prenne la troisième à la suite » suivant un noble exemple (Platon, *La République*, Livre VII). Et posons-nous la question : est-il possible de « paver » l'espace ? C'est évident avec des cubes : souvenons-nous de nos jeux d'enfants… Mais d'autres volumes sont-ils possibles ? Considérons les polyèdres réguliers : il y en a cinq en tout et pour tout ; ils sont très bien connus depuis l'Antiquité. Platon [24] en effet, dépassant la doctrine pythagoricienne fondée sur des nombres rationnels, décrit l'harmonie du monde sur la base des cinq « corps » réguliers, connus désormais sous le qualificatif de « platoniciens ». L'espace euclidien ne permet de construire que ces cinq formes régulières ; leur nombre n'a pas varié depuis les géomètres grecs ! Aucune n'a de sommet où plus de cinq arêtes convergent, aucune n'a de faces à plus de cinq côtés. Ce sont le tétraèdre formé à partir de 4 triangles équilatéraux, le cube avec 6 faces carrées, l'octaèdre avec 8 faces triangulaires, le dodécaèdre pentagonal avec 12 faces pentagonales et enfin l'icosaèdre avec 20 faces triangulaires équilatérales. Tous possèdent la propriété d'avoir une sphère inscrite et d'être inscriptibles dans une sphère, d'où leur nom de polyèdres réguliers. C'est l'icosaèdre qui approxime le mieux une sphère — une propriété qui sans doute donna l'idée d'appliquer ce volume à la description de l'espace ou de l'identifier à la quinte-essence — que

24 Décrits par Platon dans le Timée. Les quatre polyèdres construits à partir de triangles sont mis en correspondance par Platon avec les quatre « éléments » : le cube pour la terre, l'icosaèdre pour l'eau, l'octaèdre pour l'air et le tétraèdre pour le feu. Le dodécaèdre reçoit un traitement particulier , car il n'est pas construit à partir de triangles, mais de pentagones ; ce serait une figure du cosmos avec 12 couleurs correspondant à ses 12 faces (voir le Phédon).

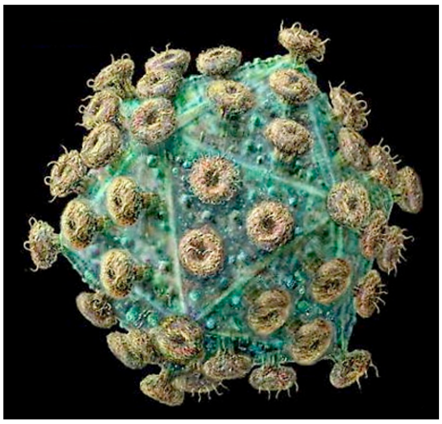
S. Dali, La Cène (1955)



J. Kepler



Un pavage de polyèdres semi-réguliers (tétrakaidecaèdres)



Virus HIV – taille : environ 100 nanomètres j'écris ici volontairement avec un trait d'union (voir la note 23 de bas de page).

Johannes Kepler dans son ouvrage *Mysterium cosmographicum* (1595) construit le système solaire sur un emboîtement de sphères et des polyèdres platoniciens, pénétrant ainsi les secrets du Créateur, pensait-il ! *Credo spatioso numen in orbe* : six sphères correspondent aux six planètes connues à cette époque (Mercure, Venus, la Terre, Mars, Jupiter et Saturne), sphères séparées dans l'ordre par : un cube, un tétraèdre, un dodécaèdre, un octaèdre et enfin un icosaèdre, successivement inscrits et circonscrits dans les sphères.

Dans le droit fil de Platon, Salvador Dali a peint la dernière Cène enveloppée dans un dodécaèdre, jouant sur le nombre douze sans doute [25].

Pour paver l'espace, à part le cas simple des cubes, il faut recourir à d'autres types de polyèdres, par exemple le rhombododécaèdre (12 faces losanges) comme le montre l'expérience de Buffon citée plus bas (compression de boules de plomb) ou le cuboctaèdre (ou tétrakaidécaèdre, ainsi nommé puisqu'il a 14 faces, carrés et hexagones). C'est ce dernier qui, selon Kelvin, réalise le meilleur ratio $^{\text{aire}}/_{\text{volume}}$.

Ces polyèdres appartiennent à la famille des 14 polyèdres d'Archimède ou polyèdres semi-réguliers, comportant plusieurs types de faces (carrés et hexagones dans le cas de la figure). Je n'insisterai pas plus sur ce point, peut-être un peu trop technique. Ce qui est intéressant, c'est que ces polyèdres ne sont pas seulement des inventions humaines, on les retrouve dans la nature : l'enveloppe des virus, la capside, formée d'un assemblage de protéines affecte une forme polyédrique : l'adénovirus ou le VIH sont icosaédriques !

Revenons à la sphère. Nous avons remarqué que l'icosaèdre est une assez bonne approximation de la sphère. Mais on peut se poser la question suivante : de même qu'il est possible de paver le plan avec une seule sorte de motif, des carrés, des triangles ou des hexagones, peut-on effectuer la même opération sur la sphère ? la réponse est non. On peut en effet utiliser des hexagones, mais ce n'est pas suffisant : il faut introduire quelques pentagones et pas en n'importe quel nombre ! La solution la plus simple comporte 32 faces soit 20 hexagones et 12 pentagones (si l'on fait abstraction de la courbure, cette figure est un icosaèdre tronqué). Tout le monde connaît parfaitement cette surface : c'est celle du ballon de football !

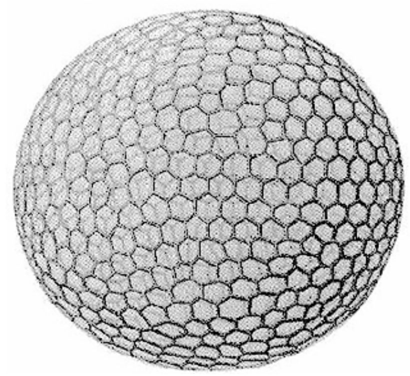
Icosaèdre tronqué et ballon de foot-ball

25 « cosmogonie arithmétique et philosophique fondée sur la sublimité paranoïaque du nombre douze. », selon l'artiste.

Géode – La Villette (noter un des pentagones)

On peut multiplier les faces pour approximer toujours mieux la sphère, mais il faudra toujours 12 pentagones, pas un de moins ! La nature fait cela très bien comme en témoignent les radiolaires, ces petits protozoaires du plancton marin qui s'entourent d'une capsule siliceuse sous forme de splendides maillages de cellules hexagonales avec les inévitables pentagones : la géométrie est incontournable !

On retrouve cette propriété dans une découverte récente qui a bouleversé la physico-chimie du carbone. Il est bien connu que le carbone peut cristalliser sous deux structures : le diamant où chaque atome de carbone est entouré de quatre voisins placés aux sommets d'un tétraèdre dont cet atome occupe le centre, ou le graphite, formé de feuillets plans dans lesquels les atomes de carbone sont situés aux nœuds d'un réseau hexagonal de sorte que chaque carbone a trois premiers voisins carbone dans le plan. De tels plans sont maintenant appelés graphènes ; le graphite est constitué d'empilements de ces plans, ce qui lui confère ses remarquables propriétés lubrifiantes. Ce qui est extraordinaire, on le sait depuis très peu d'années, c'est que ces graphènes peuvent s'enrouler pour former une structure cylindrique, dont l'enveloppe est constituée d'une ou plusieurs couches de graphène : ce sont les nanotubes, ainsi nommés à cause de leurs dimensions (un nanomètre vaut un millionième de millimètre). Mais on avait découvert auparavant une structure encore plus extraordinaire : le graphène peut former la surface d'une petite sphère. Une des plus courante est constituée de soixante atomes de carbone disposés bien sûr en réseau hexagonal aux douze pentagones près obligatoires !



Radiolaire – diamètre environ 100 microns. Cherchez les pentagones...

Ces objets extraordinaires ont été baptisés fullerènes, car son découvreur les a rapprochés de la structure des dômes géodésiques (telle la géode de La Villette) initialement conçus par l'architecte américain Buckminster Fuller : le rapport des dimensions est de plusieurs milliards, mais la structure géométrique est identique ! Le lecteur aura noté que c'est exactement la géométrie du ballon de foot-ball. De nombreuses applications des fullerènes sont actuellement à l'étude.

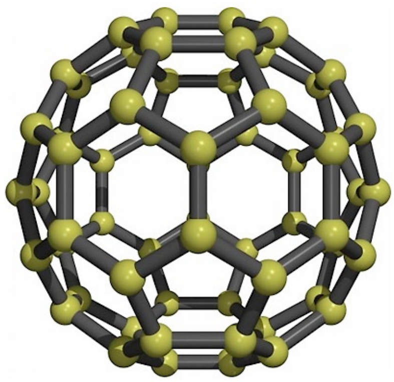


Schéma de la molécule C 60

Un autre exemple d'incontournable géométrie est fourni par les ruches des abeilles. Tout un chacun connaît le maillage hexagonal des rayons de ruche, bien connu sous le nom de « nid d'abeille » : chaque alvéole est un prisme de section hexagonale dans lequel les ouvrières viennent nourrir les larves. Dans les ruches, on dispose de cadres rectangulaires dont les deux faces sont couvertes d'un nid d'abeille ; mais que se passe-t-il dans le plan médian là où se rencontrent les alvéoles

MAN – St Germain en Laye

prismatiques issues de l'une et l'autre faces : l'interface qui se forme est — nécessité géométrique — composée de trois losanges, qui sont les faces d'une partie d'un rhombododécaèdre dont six autres faces sont déployées pour former le prisme. Les abeilles seraient-elles intelligentes — déjà Virgile le pensait !— pour savoir construire cette structure spatiale dont les faces en losanges forment un angle de 109 degrés, valeur sur laquelle, depuis les mesures effectuées par Maraldi — un astronome neveu de Cassini — on a beaucoup réfléchi et souvent déliré ? Non ! La géométrie impose tout simplement ses lois. Buffon l'avait très bien compris et expliqué dans son Histoire Naturelle :

> *« Qu'on mette ensemble dans le même lieu dix-mille automates […] tous déterminés […] à faire la même chose dans ce même lieu, il en résultera nécessairement un ouvrage régulier […] qui sera non seulement régulier, mais il aura encore l'air de la symétrie […] au plus haut point de perfection ».*

Quelques lignes plus bas, Buffon enfonce le clou :

> *« ces cellules des abeilles, ces hexagones tant vantés, tant admirés me fournissent une preuve de plus contre l'enthousiasme […] elle n'est qu'un résultat mécanique qui se trouve souvent dans la nature ».*

Pour appuyer cette dernière affirmation Buffon citait notamment les formes géométriques parfaites des cristaux ou les écailles de la peau d'une roussette.

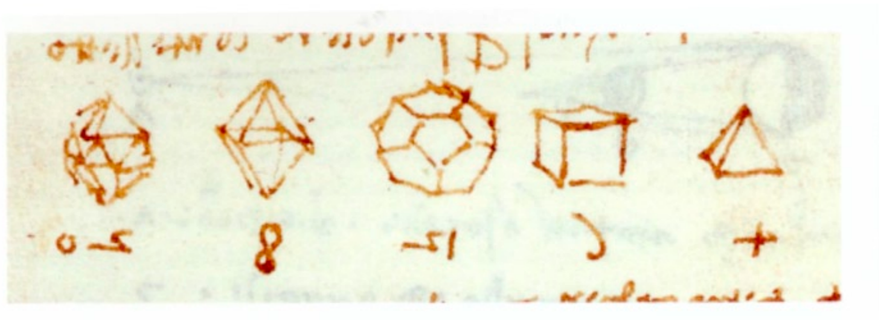
Et enfin pour prouver expérimentalement ses dires, il avait eu l'idée de compresser un empilement de petits pois contenus dans un réservoir : sous l'effet de la pression appliquée les sphères se déforment progressivement au contact les unes des autres pour faire apparaître des facettes; comme dans un empilement compact chaque sphère est en contact avec douze autres sphères, il en résulte après aplatissement de ces contacts douze facettes planes : on obtient tout naturellement des rhombododécaèdres (12 faces losanges)! En fait cette expérience avait déjà été décrite par Stephen Hales en 1727 avec… des petits pois ! [26] Ce genre d'expérience a été repris au XX^{e} siècle par J.X Marvin avec des bille de plomb : partant d'un empilement régulier de billes , il retrouve bien des rhombododécaèdres ; les résultats sont différents en partant d'empilements irréguliers, qui engendrent des polyèdres irréguliers, faisant notamment apparaître des facettes pentagonales.

---

26 L'ouvrage de Stephen Hales, *Vegetable Staticks* avait été traduit par le jeune Buffon ; celui-ci dans son Histoire naturelle omis de le citer (toute cette histoire des « petits pois de Buffon » est assez compliquée ; voir les commentaires dans l'édition abrégée du livre de D'Arcy Thompson).

Luca Pacioli, musée des Offices – Florence

Fra Giovanni de Verone



Manuscrit de Leonard de Vinci (lire les nombres de faces en symétrie miroir : 4, 6, 12, 8 et 20)

Cette structure en nid d'abeille possède des propriétés de résistance mécanique remarquables : sur ce modèle l'industrie a développé des matériaux à la fois légers et résistants, à base de papier kraft imprégné de polymères, ou de feuilles d'aluminium ; ces matériaux, connus sous le nom de *nida* ont beaucoup d'applications (par exemple plancher des cabines d'avions) de par leur résistance mécanique alliée à une grande légèreté.

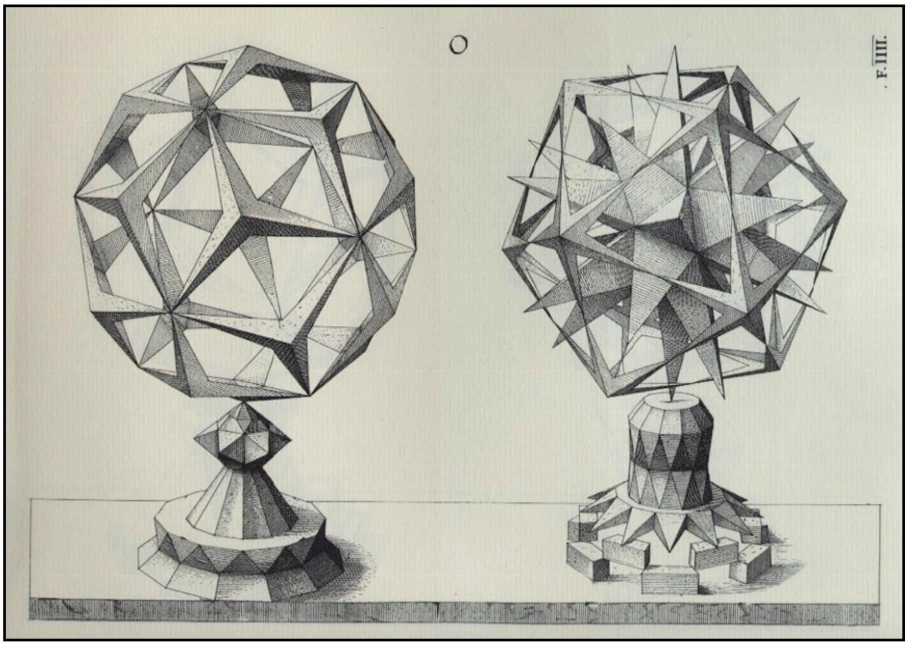
Les polyèdres réguliers ont fait depuis longtemps l'objet d'une séduction de l'esprit humain. En témoignent par exemple ces dés gallo-romains en forme de dodécaèdre pentagonal (voir photo page 48) que l'on peut voir dans une vitrine du Musée d'Archéologie nationale : image du cosmos selon Platon ou simple séduction du pentagone [27] ?

Les artistes de la Renaissance furent séduits par la géométrie des polyèdres. Un tableau du Musée des Offices, daté de 1495, représente le moine-mathématicien Luca Pacioli (1445-1517) — dont le nom a été déjà cité plus haut — faisant une démonstration de géométrie. À côté de lui sont représentés deux polyèdres : sur un livre est posé un dodécaèdre pentagonal et en suspension un objet translucide identifiable à l'un des 14 polyèdres d'Archimède. Pacioli demanda à son « élève » Léonard de Vinci de lui faire des dessins des cinq polyèdres réguliers : dans les manuscrits de Léonard on trouve bien les esquisses de ceux-ci, qui sont à la base des illustrations du livre de Pacioli reproduites plus haut. Léonard, en bon platonicien, fait correspondre ces polyèdres aux quatre « éléments » et au cosmos.

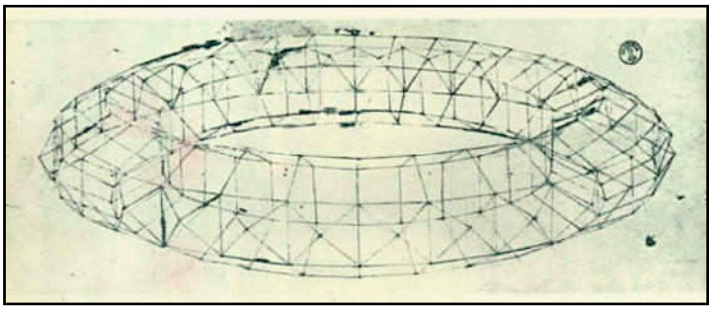
Dans son livre De divina proportione, L.Pacioli ne décrit pas moins de soixante types de polyèdres ! mais il semble bien que pour les polyèdres réguliers il ait « piraté » le travail du célèbre peintre Piero della Francesca, qui avait écrit en 1480 un ouvrage en latin intitulé : *De quinque corporibus regolaribus*. C'est dire toute la séduction que cette géométrie a exercée sur les artistes de cette époque. En témoignent encore de nombreux travaux de marqueteries. Sont célèbres celles de Fra Giovanni de Verone : sur un des panneaux sont représentés en perspective trois polyèdres dont un icosaèdre simple et un tronqué (avec ses obligatoires pentagones !). Paolo Uccello fut aussi séduit par la géométrie et la perspective : il a même dessiné en perspective un tore pavé de carrés et triangles, un véritables exploit. On retrouve ce genre de figure dans les couvre-chefs de certains personnages de tableaux et de fres-

27 Le pentagone possède de remarquables propriétés de symétrie; par exemple le rapport des longueurs d'un côté et d'une corde est égal au nombre d'or. Toutes ses remarquables propriétés ont suscité de nombreux fantasmes.

Wenzel Jamnitzer (1568)

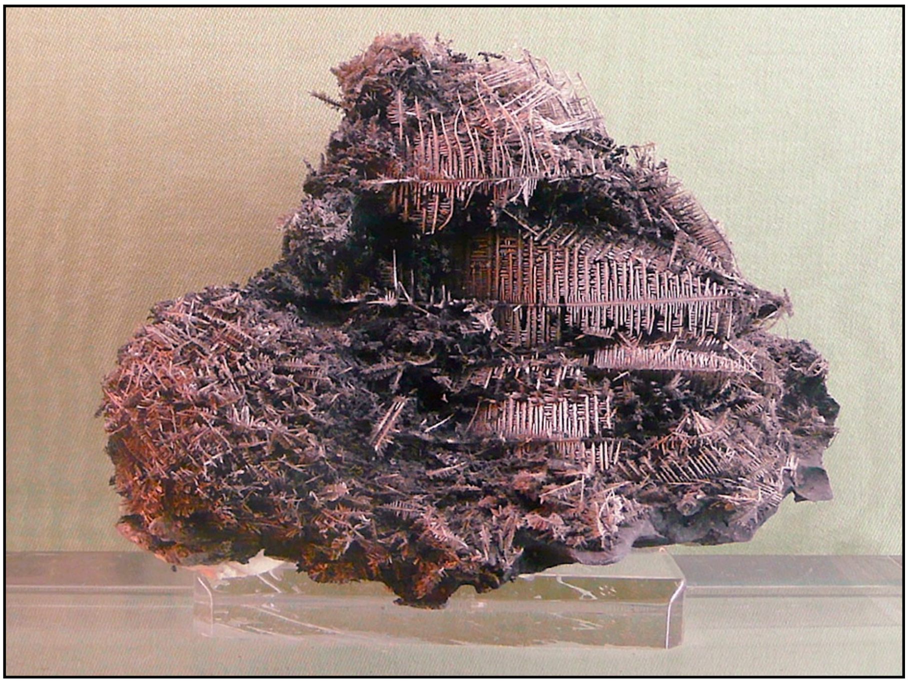


Dessin de Paolo Uccello



Galerie de Minéralogie – MNHN de Paris

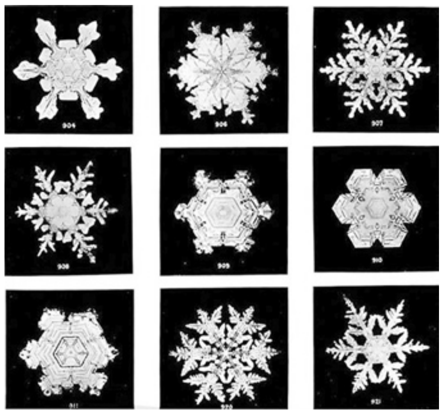
Argent natif (Ecole des Mines)



ques italiens du XVe siècle : c'est le mazzochio. Vasari[28] lui reprochait de perdre son temps avec ces exercices de perspective.

Faut-il enfin rappeler la célèbre gravure d'Albrecht Dürer (1514), La Mélancolie, bourrée de symboles, où apparaît notamment un curieux polyèdre formé de six pentagones irréguliers et de deux triangles, mais néanmoins inscriptible dans une sphère. Il faut rappeler que Dürer fut aussi un bon mathématicien : il a beaucoup travaillé la géométrie et publié en 1538 un ouvrage intitulé « De la symétrie, instructions pour la mesure à la règle et au compas », où il décrit les divers types de spirales et d'autres courbes et donne des règles pour construire les polygones à 5, 7, … côtés ainsi que les polyèdres réguliers. Au XVIe siècle à Nüremberg, des orfèvres — la famille Jamnitzer — sont restés célèbres par la variété de polyèdres creux, montés sur pied, qu'ils fabriquaient.

Les cristaux



Il n'est pas possible de parler de symétrie sans toucher quelques mots de la cristallographie. Tout un chacun a pu admirer les jeux de forme et de couleur des quartz (avec toutes ses variétés : améthyste, citrine, etc.), des saphirs, des grenats, des tourmalines, des pyrites, des spinelles… Les images de cristaux de glace, en étoiles à six branches, sont bien connues pour leur aspect esthétique.

Les métaux sont des solides cristallisés, mais les formes cristallines n'apparaissent que dans des circonstances exceptionnelles : lorsqu'ils croissent librement à partir du liquide ou de la vapeur ils peuvent apparaître sous des faciès typiques appelées dendrites.

Les cristaux naturels peuvent être de taille microscopique ou atteindre des dimensions métriques, tel les fameux cristaux géants exposés au Muséum d'Histoire naturelle à Paris. C'est dans des échantillons de grande transparence et perfection qu'il est possible de tailler des gemmes, dont les facettes, contrairement à celles du cristal naturel, sont le résultat du travail du lapidaire.

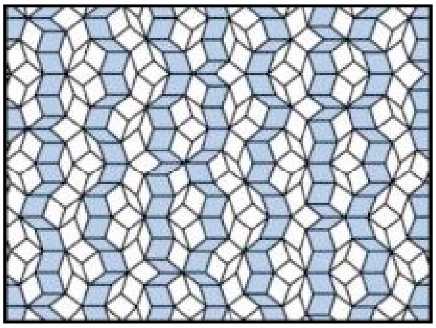
Les formes géométriques régulières des cristaux, qui résultent de leur mécanisme de croissance, avec des angles entre les faces parfaitement déterminés pour chaque espèce minérale, avaient attiré l'attention des savants au XVIIIe siècle. De même que Lavoisier est le

28 Le vite de'piu eccelenti pittori, scultori e architectori (1550-1568).

père de la Chimie, l'abbé René Just Haüy (1745-1822) est le père de la Cristallographie[29]. Il remarqua notamment que la forme rhomboédrique du spath d'Islande — une forme cristalline de la calcite — demeure semblable quand on brise le cristal, aussi petits les morceaux soient-ils.

Il en déduisit que celui-ci est formé d'un empilement de « molécules intégrantes » — ainsi les baptisa-t-il — qui, par translations dans les trois directions de l'espace, forment le cristal macroscopique. Dans ce maillage, seules un certain nombre d'opérations de symétrie (rotations, miroirs, etc.) sont compatibles avec la symétrie de translation, c'est à dire avec la répétition à l'infini de la « maille » élémentaire, suivant l'hypothèse d'Haüy. Ce nombre n'est plus 17 comme dans le plan, mais 32. Il est remarquable que des axes de symétrie d'ordre 2, 3, 4 et 6 (c'est à dire des rotations d'un demi, d'un tiers,… de tour) sont possibles, mais que l'ordre 5 est interdit, car la rotation d'un cinquième de tour autour d'un axe est incompatible avec l'identité par translation !

Parmi ces 32 groupes de symétrie, il est un cas bien connu : l'empilement « compact » de boules sphériques (un modèle que l'on utilise pour représenter approximativement les atomes) tel que, dans un plan, chaque boule est entourée de six autres : plus trois dans le plan au-dessus et trois au-dessous, soit au total douze voisines en contact. C'est exactement l'empilement des oranges qui fait l'objet d'une illustration au début de ce texte. C'est ainsi que sont disposés les atomes de cuivre ou d'or dans le métal sous cette forme hautement symétrique, ce qui explique les propriétés de ces métaux, notamment leur grande plasticité, c'est à dire leur aptitude à la mise en forme, source de toutes leurs applications.



Un pavage de Penrose (la couleur bleue est juste là pour guider l'oeil).

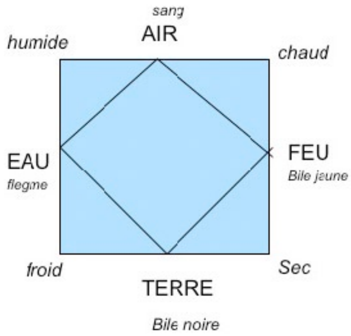
La découverte il y a quelques année de ce que l'on a appelé les « quasi-cristaux » avec un axe de symétrie d'ordre 5 ou 10 a provoqué un véritable séisme dans le monde des cristallographes. Les mathématiciens sont venus à la rescousse : les pavages de Penrose (un mathématicien anglais) dans le plan en sont des exemples. On identifie bien un même motif de symétrie 5, mais il n'est jamais distribué régulièrement.

Ces dessins de pavages ont été très populaires il y quelques années, basés souvent sur des éléments plus variés que les losanges de la figure ci-contre (figure construite avec des losanges de deux types : *étroits* et *larges* dont les proportions sont dans un rapport qui tend vers le nombre d'or).

---

29 Le grand public connaît mieux son frère cadet Valentin, créateur d'une école qui deviendra l'Institut des jeunes aveugles.

Les lois de la physique



Pour compléter ce panorama, il me semble intéressant d'approfondir la nature des lois physiques en relation avec la notion de symétrie. C'était déjà la vision de Platon avec ses polyèdres et celle d'Aristote : selon celui-ci, la théorie du monde repose sur un schéma symétrique, sur la base d'un carré : 4 éléments, 4 qualités et pour les humains 4 humeurs.

Si les lois physiques sont « universelles », c'est qu'elles sont invariantes par symétrie de translation dans le temps et dans l'espace et par symétrie de rotation, ce qui implique la conservation des propriétés fondamentales : respectivement énergie, quantité de mouvement — impulsion — et moment angulaire. Ces invariances font l'objet du théorème de Noether, du nom de la grande mathématicienne allemande Emmy Noether (1882-1935). Sa discussion dépasserait malheureusement le cadre de cet exposé.

Mais qu'en est-il de la symétrie miroir ? Observons les photographies d'une expérience — par exemple la chute de billes sur un plan incliné (l'expérience de Galilée) — et de son image dans un miroir : il est impossible de dire laquelle est réelle ou fictive ! Les deux mondes sont possibles. Des paradoxes à ce sujet font l'objet du livre de Lewis Carroll *Through the looking glass*, décrivant les aventures d'Alice « au-delà du miroir ».

La droite et la gauche sont donc définies arbitrairement. C'est ce qu'on appelle le principe de parité qui paraît évident en mécanique. Cependant le prix Nobel de Physique 1957 fut attribué à deux physiciens théoriciens Lee et Yang qui mettaient en cause l'universalité de la parité. L'expérience a confirmé rapidement en 1956 cette prédiction théorique dans un processus à l'échelle infra-atomique dits « d'interaction faible », la décomposition radioactive du Co^{60} [30] : l'émission des rayons β est observée préférentiellement dans la direction opposée au champ magnétique qui aligne les noyaux de cobalt, ce qui permet d'orienter dans l'absolu le système et donc d'attribuer une signification absolue à la droite et la gauche. Les physiciens peuvent donc dialoguer sans équivoque avec leurs collègues d'une lointaine exoplanète grâce à cette référence absolue ! Ce résultat s'énonce de manière générale par l'expression non-conservation de la parité.

30 Pour aligner parfaitement les noyaux des atomes de Cobalt dans un champ magnétique, l'expérience a du être effectuée à une température extrêmement basse : 0,003K !

D'autres expériences mettant en jeu les neutrinos permettent également de distinguer la droite et la gauche : tous les neutrinos de l'univers ont une hélicité négative (sens de rotation, *spin,* par rapport à la direction de sa vitesse). L'hélicité du neutrino, telle une toupie qui tournerait dans un sens plutôt que dans un autre, donne donc une référence absolue des trois directions de l'espace.

Ainsi l'univers n'est pas parfaitement symétrique. On peut dès lors songer à reprendre une question que nous nous étions posée : cette dissymétrie ultime permet-elle d'expliquer la présence d'un seul énantiomère dans le monde vivant ? Les énergies de formation des molécules énantiomères seraient très légèrement différentes en raison de l'effet des « interactions faibles » : les vitesses de formation des deux variétés difféeraient d'un facteur 10^{-17} ! La réponse n'est pas certaine et fait toujours l'objet de débats.

Les lois de la physique sont également invariantes par changement du signe de la charge électrique (et d'autres types de « charges » définies en physique des particules). Toutes ces symétries ont fait l'objet de réflexions théoriques approfondies, sans toutefois qu'il ait été possible de rendre compte d'une dissymétrie fondamentale du monde physique : la prédominance de la matière sur l'antimatière.

Des questions sans réponse

On peut s'étonner que les concepts les plus évolués des mathématiques se retrouvent dans la nature, depuis la structure des molécules et des cristaux jusqu'à la forme virus, des êtres unicellulaires, des végétaux et des animaux, aussi bien que dans les arts plastiques et même musicaux. Ceci n'est pas sans poser quelques questions d'ordre philosophique, telles que :

— Pourquoi la vie obéit-elle à des règles très strictes de symétrie ?

— Ces concepts sont-ils le fruit de notre cerveau ou une condition d'existence du monde qui nous entoure ?

Comme nous l'avons vu, les notions de symétrie sont au fondement des lois qui gouvernent les phénomènes physiques, chimiques et biologiques. Pour les anciens, le cercle et la sphère, à cause de leur degré de symétrie très élevé, étaient des formes parfaites et l'univers céleste reflétait cette perfection [31]. Les lois de Kepler — orbites elliptiques — et les observations astronomiques de Galilée bousculèrent cette croyance trop simpliste.

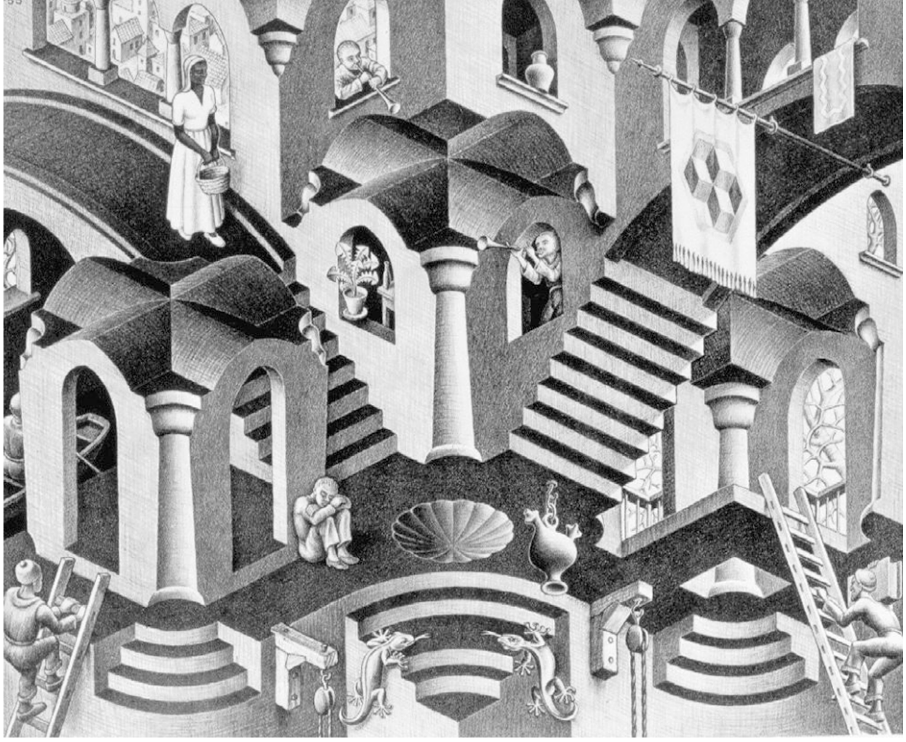
Sans aller trop loin sur ce terrain, il faut citer le fameux principe de Curie, énoncé par Pierre Curie en 1894. Il en existe plusieurs formulations ; pour simplifier on peut dire que toute dissymétrie dans un effet observé a son origine dans la cause qui l'a produite. Autrement dit il n'y a pas de génération spontanée des dissymétries, de perte de symétrie. Cet énoncé un peu abstrait est en fait un outil très puissant pour obtenir des informations — qualitatives — sur les caractéristiques des *causes*, lorsque l'on ne peut qu'en observer que les *effets*.

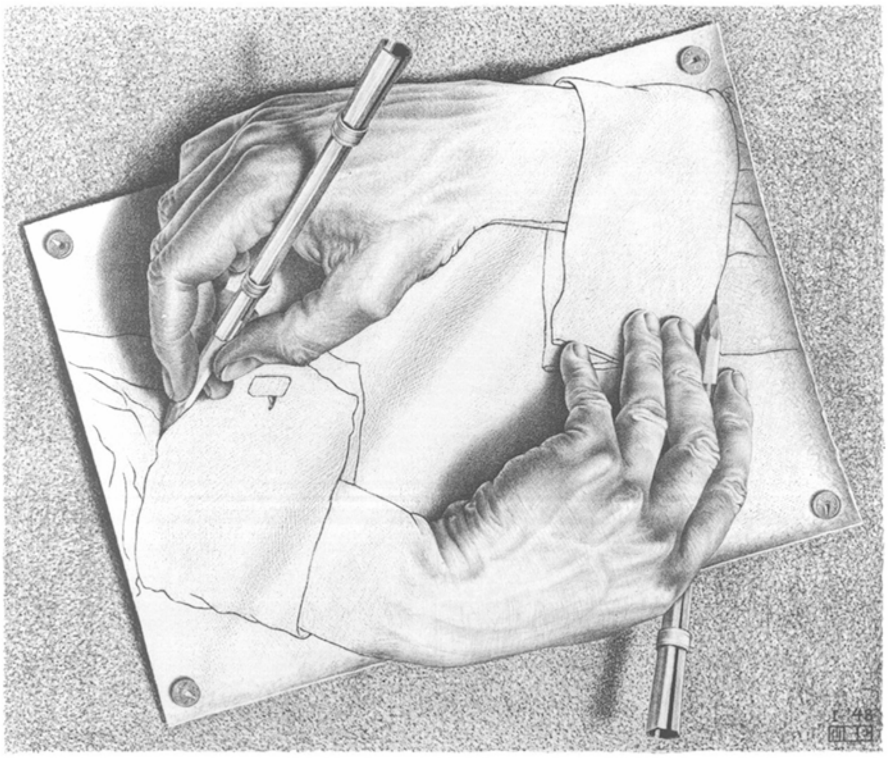
Une cause de dissymétrie classique est un changement de température ou de pression, phénomène familier dans le premier cas avec les trois états de la matière : gaz, liquide, solide, caractérisés par une perte de symétrie à chaque transition en température décroissante ou pression croissante. Ces transitions peuvent se poursuivre à l'état solide lui-même : plus la température est abaissée, moins symétrique sera la structure cristallographique. La théorie des transitions de phase — les brisures de symétrie — est un des domaines fondamentaux de la Physique.

Une discussion du principe de Curie sortirait du cadre de cet exposé. Mais on peut simplement remarquer qu'il pose une question fondamentale sur l'origine des dissymétries : que ce soit dans l'univers, matière contre antimatière, ou encore dans le monde vivant, chiralité des composants chimiques du vivant. Grandes questions, grandes énigmes, qui restent encore sans réponse satisfaisante !

En guise de conclusion, j'oserai avancer que la symétrie est au fondement de l'intelligibilité du monde. Les sciences physiques et chimiques se développent sur la base de lois de symétrie. Toute l'histoire de l'univers, du cosmos au monde vivant, est scandée par des brisures de symétrie. On peut dire, suivant l'intuition des Anciens, que la mathématique informe, au sens philosophique, le Monde. Cette adéquation entre notre création intellectuelle et le monde au sein duquel nous vivons est-elle le résultat de l' inconscient collectif — invoqué par Jung — qui nous imprègne, issus que nous sommes de si nombreuses générations humaines ?

31 Platon (Timée,33) écrit à propos de la sphère : « le centre équidistant de tous les points superficiels, … ce qui est de toutes les figures la plus parfaite et la plus complètement semblable à soi-même ».





« Cette étude-là (la géométrie) est tout entière une occupation dont la connaissance est le but, […] que ce but est la connaissance de ce qui toujours existe […] elle doit être propre à tirer l'âme dans la direction de la vérité, propre à parfaire la pensée philosophique où les regards qu'actuellement nous tenons en bas, l'âme les tiendra en haut. » (Platon, La République, livre VII).

Pour terminer, j'aimerais présenter quelques gravures de Maurits Escher (1898-1972), qui fondées sur les lois rigoureuses de la symétrie et de la perspective, nous entraînent dans ces univers étranges où les mains se dessinent elles-mêmes, où les escaliers sont infinis et s'entre-croisent et où la troisième dimension ne sait pas elle-même si elle existe vraiment. L'analyse de son oeuvre mériterait à elle seule une conférence entière.

Bibliographie

D'Arcy Thompson
On Growth and Form
Cambridge University Press, 1917, 1961
Traduction française : Forme et Croissance
Le Seuil, Paris, 1994/2009

Hermann Weyl
Symmetry
Princeton University Press, 1952
Traduction française : Symétrie et mathématique moderne
Flammarion, 1964

Jean Sivardiere
La Symétrie en Mathématiques, Physique et Chimie
Presses Universitaires de Grenoble, 1995

M.C. Escher
The graphic work
Oldbourne, London, 1960
L'oeuvre graphique
Taschen, 2001

Caroline H. Macgillavray
Symmetry Aspects of M.C. Escher periodic Drawings
International Union of Crystallography, 1976

P. Cossat
Les symétries brisées
Pour la Science, Belin (1976)

Collectif
La symétrie aujourd'hui
14 entretiens menés par E.Noël à Radio-France Editions du Seuil, 1989

Peter S. Stevens
Patterns in Nature
Traduction française : Les formes dans la nature
Ed du Seuil, 1978

Christine Dézarnaud Dandine et Alain Sevin
Symétrie m'était contée… histoires de symétrie
illustré par Piem
Ellipses Editions, 2007

Academia Europea
Symmetry and Asymmetry
European Review, Cambridge University Press, Vol.13, Suppl.2 (octo. 2005)

Ernest Haeckel
Kunsformen der Natur (1904)
Trad. anglaise : Art Forms in Nature, 100 Plates
Dover Publications (1974)

Jules Bourgoin
Eléments de l'art arabe, le trait et l'entrelac 200 planches
Firmin-Didot. Paris 1879
Trad. Anglaise : Arabic Geometrical Pattern and Design
Dover Publications (1974)

Frank Close
Lucifer's Legacy
Oxford University Press, 2000
Trad. française :
Asymétrie : la beauté du diable , où se cache la symétrie de l'univers ?
EDPSciences (2001)

Remerciements

Je tiens à remercier tous mes amis qui ont bien voulu me faire part de leurs remarques et suggestions, et plus spécialement Lionel Mochamps qui a repris toute la mise en page de ce texte .

Jean Philibert